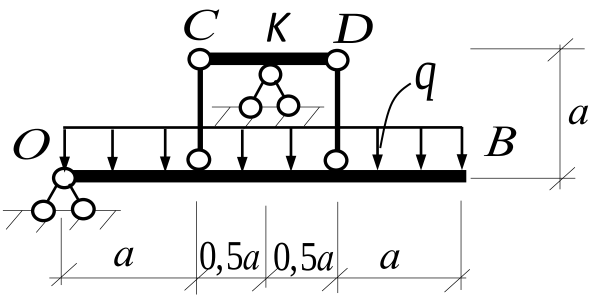
НГАСУ (Сибстрин)

Сопротивление материалов ***Олимпиада – 2012***

Задача № 1

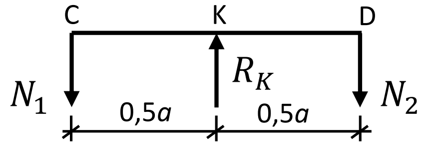


Два абсолютно жёстких бруса ***OB*** и ***CD*** соединены между собой упругими стержнями, выполненными из одного материала и имеющими равные площади поперечных сечений.

Определить перемещение точки ***B***, считая заданными ***a***, ***E***, ***A***, ***q***.

Решение

Из условия равновесия CD:



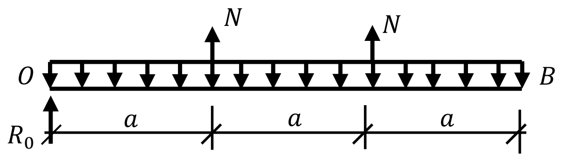
$$\sum m_K = N_1 \cdot 0{,}5a - N_2 \cdot 0{,}5a = 0 => \ N_1 = N_2 = N.$$

Так как $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}$ и $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$, то $\Delta\, l_1 = \ \Delta\, l_2 = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \Delta l.$

Из условия равновесия OB:

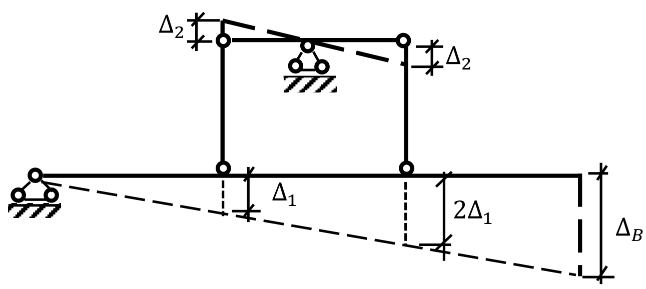
$$\sum m_o = N \cdot a - N \cdot 2a - q \cdot 3a \cdot 1{,}5a = 0 =>$$

$$=> N = 1{,}5 \cdot q \cdot a.$$



$$\Delta l_1 = \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta l = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{1{,}5 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}, \quad (1)$$

$$\Delta l_2 = 2\Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{1{,}5 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}. \quad (2)$$



Складывая (1) и (2) получаем:

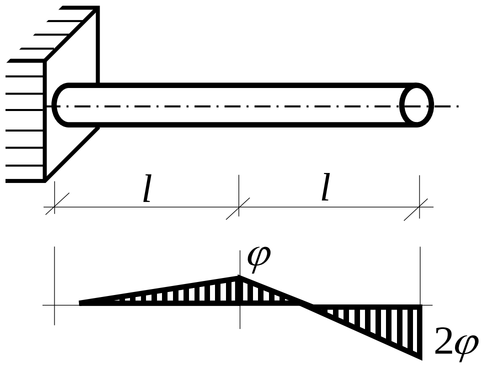
$$3\Delta_1 = \frac{3 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A} => \qquad \Delta_1 = \frac{q \cdot a^2}{E \cdot A}.$$

Перемещение точки B:

$$U_B = \Delta_B = 3\Delta_1 = \frac{3 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}.$$

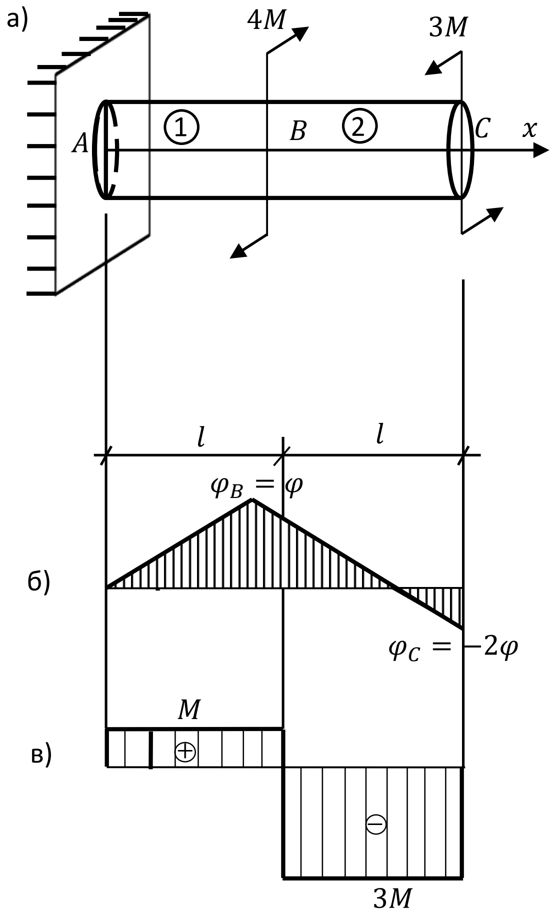
Ответ: $U_B = \dfrac{3 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}.$

Задача № 2



По заданной эпюре углов закручивания $\boldsymbol{\varphi}$ представить схему загружения вала и построить эпюру крутящихся моментов. Жесткость поперечного сечения стержня на кручение $\boldsymbol{GI}_{\rho}$ по длине стержня считать постоянной. Величины $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{I}_{\rho}$, l заданы.

Решение



$$\varphi_{\text{B}} = \varphi_A + \varphi_{A-B} = 0 + \frac{M_{t1} \cdot l}{G \cdot \mathcal{J}_\rho} = \varphi \quad =>$$

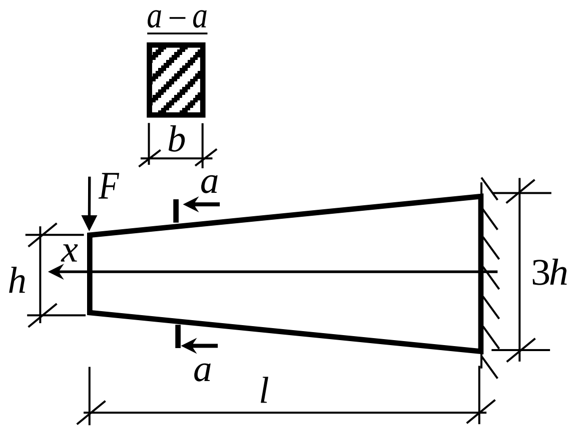
$$=> \quad \text{M}_{t1} = \frac{G \cdot \mathcal{J}_\rho}{l} \cdot \varphi.$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{B-C} = \varphi + \frac{M_{t2} \cdot l}{G \cdot \mathcal{J}_\rho} = -2\varphi \quad =>$$

$$=> \quad \text{M}_{t2} = -3\frac{G \cdot \mathcal{J}_\rho}{l} \cdot \varphi.$$

Примем $M_{t1} = M => M_{t2} = -3M -$ эпюра M_t показана на рис. в.

Схема загружения представлена на рис. а

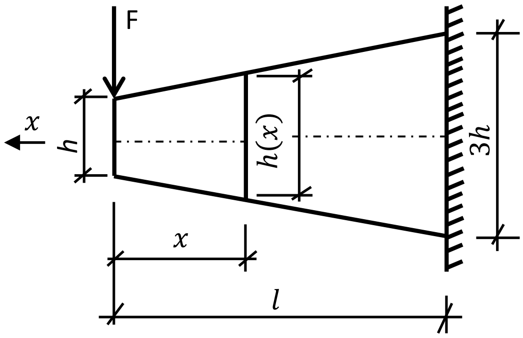


Задача № 3

Балка-консоль прямоугольного сечения загружена на конце силой $\boldsymbol{F}$. Ширина балки постоянна и равна $\boldsymbol{b}$, а высота меняется по линейному закону от $\boldsymbol{h}$ до $3\boldsymbol{h}$.

Установить положение опасного по нормальным напряжениям сечения и определить величину $\sigma_{x\,\max}$

Решение



$$\sigma_{max} = \left|\frac{M(x)}{W(x)}\right|_{max} \qquad |M(x)| = F \cdot x \qquad W(x) = \frac{b \cdot h^2(x)}{6}$$

$$h(x) = h + \frac{2 \cdot h}{l} \cdot x = h \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot x}{l}\right) =>$$

$$=> W(x) = \frac{b}{6} \cdot h^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot x}{l}\right)^2.$$

$$\left|\frac{F \cdot x}{\frac{b}{6} \cdot h^2 \cdot \left(1 + \frac{2x}{l}\right)^2}\right|' = 0 => \left|\frac{x}{\left(1 + \frac{2x}{l}\right)^2}\right|' = 0 =>$$

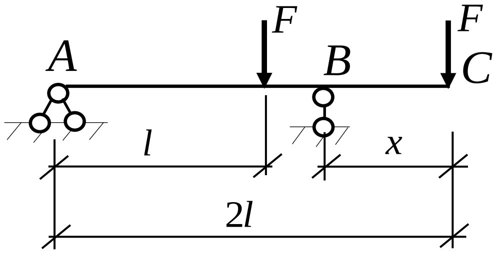
$$=> \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} \cdot x_0}{\left(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l}\right)^4} = 0.$$

$$1 + \frac{2 \cdot x_0}{l} \neq 0 => 1 + \frac{2 \cdot x_0}{l} - \frac{4 \cdot x_0}{l} = 0 => \quad \frac{2 \cdot x_0}{l} = 1 => x_0 = 0{,}5l\,.$$

Тогда $\sigma_{max} = \dfrac{F \cdot 0{,}5l}{\frac{b}{6} \cdot h^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 0{,}5l}{l}\right)^2} = 0{,}75 \cdot \dfrac{F \cdot l}{b \cdot h^2}$.

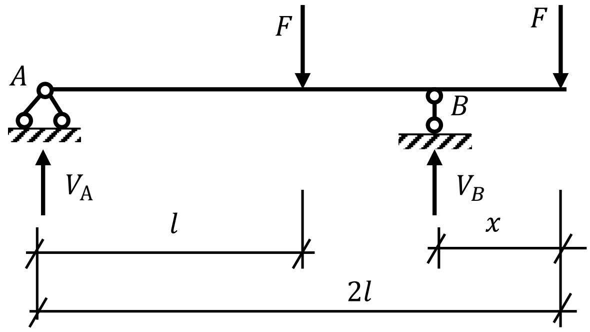
Ответ: $x_0 = 0{,}5l, \;\; \sigma_{max} = 0{,}75 \cdot \dfrac{F \cdot l}{b \cdot h^2}$.

Задача № 4



Определить положение опоры ***B*** балки ***AC***, при котором наибольшие по абсолютной величине отрицательный и положительный изгибающие моменты будут равны. Размер ***l*** известен.

Решение



$$\sum m_B = F\cdot(l-x) - F\cdot x - V_A\cdot(2l-x) = 0 =>$$

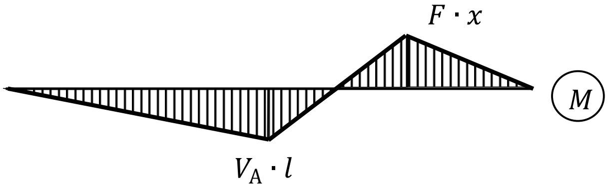
$$=> V_A = \frac{F\cdot(l-2x)}{2l-x}.$$

По условию $V_A\cdot l = F\cdot x =>$

$$=> \frac{F\cdot(l-2x)}{2l-x}\cdot l = F\cdot x =>$$

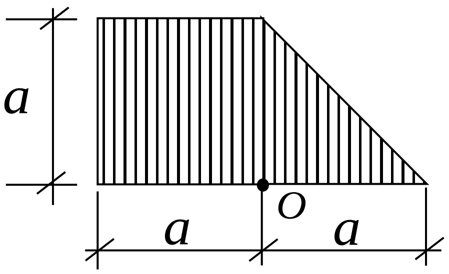
$$=> x^2 - 4\cdot l\cdot x + l^2 = 0 =>$$

$$=> x_{1,2} = 2l \pm \sqrt{4l^2 - l^2} = 2l \pm l\cdot\sqrt{3}$$



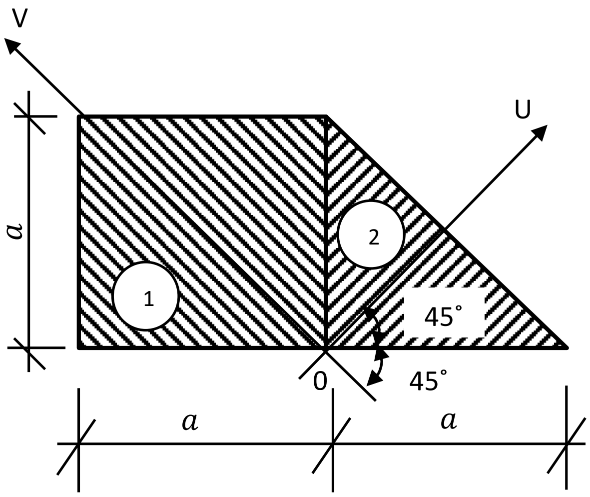
$$=> x_1 = l\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 2{,}732l;\quad x_2 = l\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 0{,}268l.$$

Ответ: $x_0 = 0{,}268l.$



Задача № 5

Для фигуры, показанной на чертеже, определить положение главных осей, проходящих через точку ***O***, и вычислить осевые моменты инерции относительно этих главных осей. Размер “***a***” известен.



Решение

Проведем через точку O оси U и V.

Для квадрата 1 ось V – ось симметрии, поэтому $\mathcal{J}_{UV}^{1} = 0$.

Для равнобедренного треугольника 2 ось U – ось симметрии, поэтому $\mathcal{J}_{UV}^{2} = 0$.

Для всего сечения $\mathcal{J}_{UV} = \mathcal{J}_{UV}^{1} + \mathcal{J}_{UV}^{2} = 0$,

следовательно, U и V – главные оси.

$$\mathcal{J}_u = \mathcal{J}_u^{1} + \mathcal{J}_u^{2} = \left[\frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{12} = a^4\left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}\right] =$$

$$= a^4\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{8} \cdot a^4.$$

$$\mathcal{J}_V = \mathcal{J}_V^{1} + \mathcal{J}_V^{2} = \frac{a^4}{12} + a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = a^4\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{24} \cdot a^4 .$$

Ответ: $\mathcal{J}_u = \mathcal{J}_{max} = \frac{5}{8} a^4$; $\mathcal{J}_V = \mathcal{J}_{min} = \frac{5}{24} a^4$.