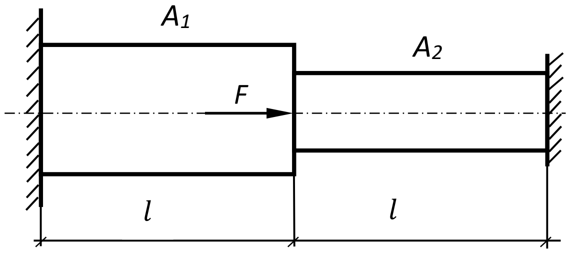
НГАСУ (Сибстрин)

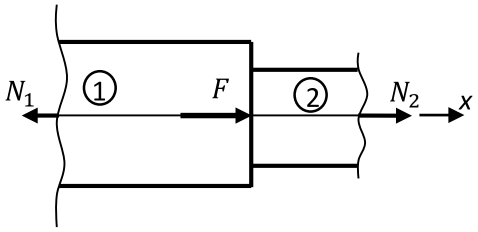
Сопротивление материалов ***Олимпиада – 2013***



Задача № 1

Стальной ступенчатый стержень нагружен силой $\boldsymbol{F}$. Площади поперечных сечений участков $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$. Коэффициент линейного температурного расширения $\boldsymbol{\alpha}$. На сколько градусов необходимо нагреть стержень, чтобы напряжения на первом участке были равны нулю.

Решение



Из условия равновесия вырезанной части:

$\sum x = 0 => \ -N_1 + N_2 + F = 0.$

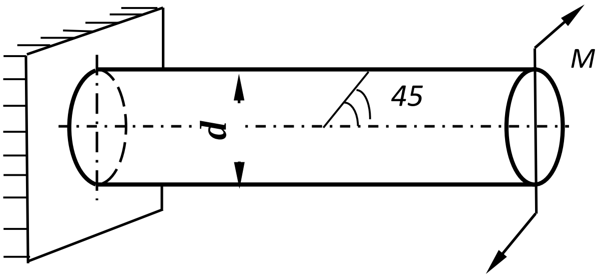
По условию $\sigma^{①} = 0 \ => N_1 = 0 => N_2 = -F.$

Уравнение совместности деформаций:

$$\frac{N_1 \cdot l}{EA_1} + \frac{N_2 \cdot l}{EA_2} + \alpha \cdot 2l \cdot \Delta T = 0 =>$$

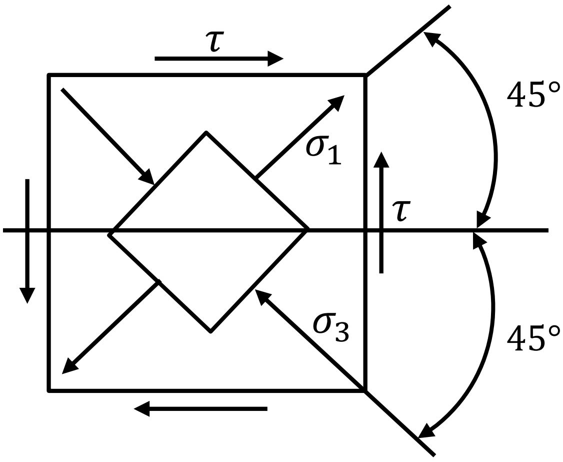
$$=> 0 - \frac{F \cdot l}{E \cdot A_2} + \alpha \cdot 2l \cdot \Delta T = 0 => \Delta T = \frac{F}{2\alpha E A_2}.$$

Ответ: $\Delta T = \frac{F}{2\alpha E A_2}$.



Задача № 2

На поверхности вала, скручиваемого моментом *M*, под углом 45° к его оси замерена деформация **ε** = $5 \cdot 10^{-4}$ (см. рис.). Определить коэффициент Пуассона материала вала, если ***M*** = 15,7 кН·м, ***d*** = 100 мм, ***E*** = $2 \cdot 10^{5}$ МПа.



Решение

При кручении в любой точке вала – чистый сдвиг.

$$\tau = \frac{M_t}{W_\rho} = \frac{15{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 16}{\pi \cdot (0{,}1)^3} = 80 \text{ МПа.}$$

Главные напряжения:

$$\sigma_1 = \tau\,; \quad \sigma_2 = 0\,; \quad \sigma_3 = -\tau\,.$$

По закону Гука:

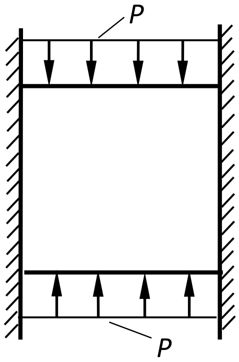
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)) =$$

$$= \frac{1}{E} \cdot \left(\tau - \nu \cdot (0 - \tau)\right) = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau. =>$$

$$=> \nu = \frac{E \cdot \varepsilon_1}{\tau} - 1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{80} - 1 = 0{,}25.$$

Ответ: ν=0,25.

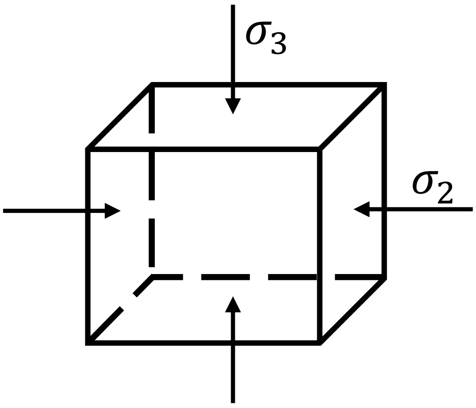
Задача № 3



Прямоугольный параллелепипед (см.рис.), находящийся между двумя неподвижными стенками и плотно соприкасающийся с ними, сжимается по вертикали давлением ***p***.

Определить относительное изменение объема параллелепипеда. Трением о стенки пренебречь. ***E, p,* ν** заданы**.**

Решение



В материале параллелепипеда возникает напряженное состояние:

σ_1=0 ; σ_2 =? ; $\sigma_3 = -$p.

Из обобщённого закона Гука:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)] =$$

$$= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (0 - \mathrm{p})] = 0 =>$$

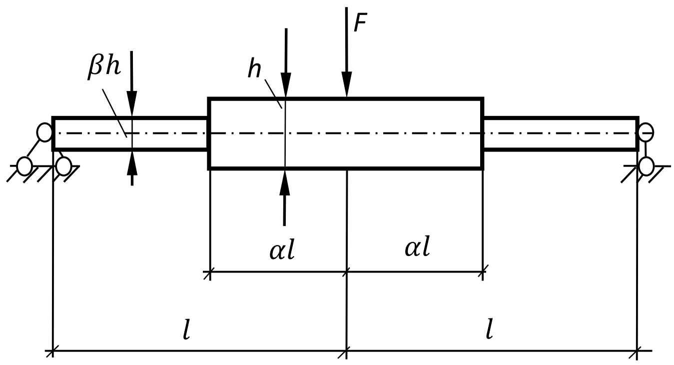
$$=> \sigma_2 = -\nu \cdot \mathrm{p}.$$

Относительное изменение объёма параллелепипеда:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (0 - \nu \cdot \mathrm{p} - \mathrm{p}) = - \frac{(1-2\nu) \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \mathrm{p}.$$

– объём уменьшается

Ответ: $\theta = -\dfrac{(1-2\nu) \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \mathrm{p}.$



Задача № 4

Ступенчатая балка прямоугольного поперечного сечения шириной ***b*** нагружена сосредоточенной силой ***F*** (см.рис.). Из условия минимума веса балки установить значения параметров **α** и **β** при условии равенства максимальных нормальных напряжений в опасных сечениях.

Решение

Опасные сечения: 1 – в середине пролёта;

2 – сечения сопряжений ступеней балки.

$M_z^{①} = \frac{F}{2} \cdot l$ $\quad M_z^{②} = \frac{F}{2} \cdot (l - \alpha \ \cdot l)$ $\quad W_z^{①} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $\quad W_z^{②} = \frac{b \cdot (\beta \cdot h)^2}{6}$

$$\frac{M_z^{①}}{W_z^{①}} = \frac{M_z^{②}}{W_z^{②}} \Rightarrow \frac{Fl \cdot 6}{2 \cdot bh^2} = \frac{F(l - \alpha l) \cdot 6}{2 \cdot b(\beta h)^2} \Rightarrow \alpha = 1 - \beta^2 \ .$$

$$V = V_1 + V_2 = 2 \cdot b \cdot \beta h \cdot (l - \alpha l) + 2 \cdot b \cdot h \cdot \alpha l = 2b\beta hl \cdot (1 - \alpha) + 2bh\alpha l =$$

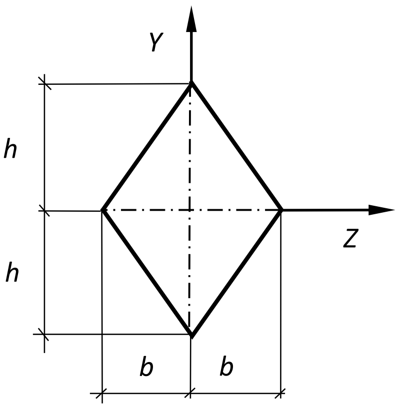
$$=2b\beta hl \cdot (1 - 1 + \beta^2) + 2bhl \cdot (1 - \beta^2) = 2bhl \cdot (1 - \beta^2 + \beta^3).$$

$$\frac{dV}{d\beta} = 2bhl \cdot (-2\beta + 3\beta^2) = 0 \ \Rightarrow \ \beta = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = 2bhl \cdot (-2 + 6\beta) > 0 \ \text{ при } \beta = \frac{2}{3}$$, т. е. соответствует минимуму веса.

$$\alpha = 1 - \beta^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

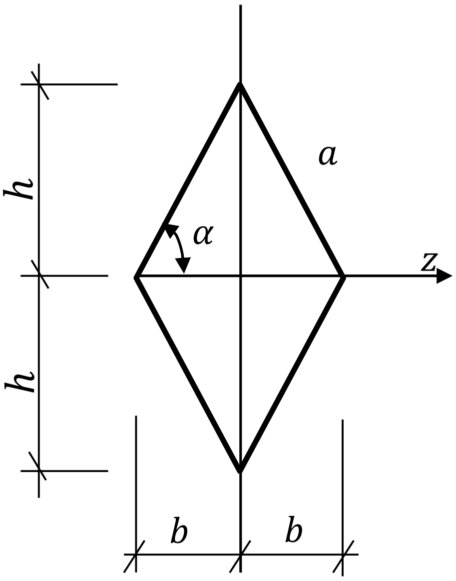
Ответ: $\alpha = \frac{5}{9}$; $\beta = \frac{2}{3}$.



Задача № 5

Для сечения в виде ромба определить, при каком соотношении ***h/b*** будет максимальным осевой момент сопротивления $\boldsymbol{W_z}$.

Решение



$tg\alpha = \dfrac{h}{b}$

$sin\alpha \neq 0$

Обозначаем через a сторону ромба , тогда:

$b = a \cdot cos\alpha$; $h = a \cdot sin\alpha$.

$$\mathcal{J}_z = 2 \cdot \frac{2b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot cos\alpha \cdot (a \cdot sin\alpha)^3 =$$

$$= \frac{a^4}{3} \cdot sin^3\alpha \cdot cos\alpha.$$

$$W_z = \frac{\mathcal{J}_z}{|y|_{max}} = \frac{\mathcal{J}_z}{h} = \frac{a^4 \cdot sin^3\alpha \cdot cos\alpha}{3 \cdot a \cdot sin\alpha} = \frac{a^3}{3} \cdot sin^2\alpha \cdot cos\alpha\ .$$

$$\frac{dW_z}{d\alpha} = \frac{a^3}{3} \cdot \big((2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha) \cdot cos\alpha - sin\alpha \cdot sin^2\alpha\big) =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot (2 \cdot sin\alpha \cdot cos^2\alpha - sin^3\alpha) = 0 =>$$

$$=> \frac{a^3}{3} \cdot sin\alpha \cdot (2 \cdot cos^2\alpha - sin^2\alpha) = 0 => 2 \cdot cos^2\alpha = sin^2\alpha =>$$

$$=> tg^2\alpha = 2 => \frac{h}{b} = \sqrt{2}\ .$$

$$\frac{d^2W_z}{d\alpha^2} = \frac{a^3}{3} \cdot (2 \cdot cos\alpha \cdot cos^2\alpha + 2 \cdot cos\alpha \cdot (-sin\alpha) \cdot 2 \cdot sin\alpha - 3 \cdot sin^2\alpha \cdot cos\alpha =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot cos\alpha \cdot (2 \cdot cos^2\alpha - 4 \cdot sin^2\alpha - 3 \cdot sin^2\alpha) = \frac{a^3}{3} \cdot cos\alpha \cdot (2 \cdot cos^2\alpha - 7 \cdot sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot cos\alpha \cdot (2 - 2 \cdot sin^2\alpha - 7 \cdot sin^2\alpha) = \frac{a^3}{3} \cdot cos\alpha \cdot (2 - 9 \cdot sin^2\alpha).$$

При $\alpha = arctg\sqrt{2}$ $\dfrac{d^2W_z}{d\alpha^2} < 0 => \dfrac{h}{b} = \sqrt{2}$ соответствует $maxW_z$.

Ответ: $\dfrac{h}{b} = \sqrt{2}$.