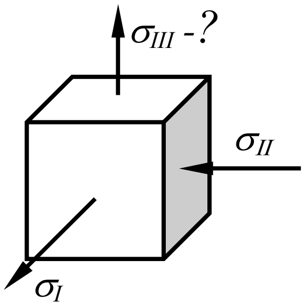
НГАСУ (Сибстрин)

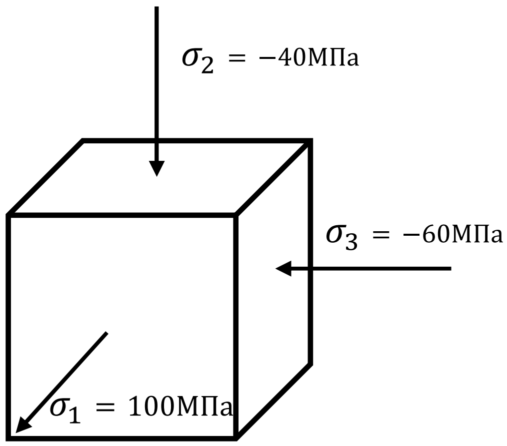
Сопротивление материалов **_Олимпиада – 2014_**

<u>*Задача № 1*</u>



В одной из точек детали известны два главных напряжения: $\sigma_I = 100$ МПа и $\sigma_{II} = -60$ МПа. Каким должно быть третье главное напряжение, чтобы объём в окрестности рассматриваемой точки не изменился? (В ответе главные напряжения обозначить в виде $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Будет ли обеспечена прочность материала в данной точке, если расчётное сопротивление материала $R = 155$ МПа? (Использовать энергетическую теорию прочности).

<u>Решение</u>



По условию объёмная деформация равна нулю:

$$\theta = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = 0 \;\; =>$$

$$\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0 => \sigma_{III} = -\sigma_I - \sigma_{II} =$$

$$= -100 - (-60) = -40\text{МПа}.$$

Следовательно : $\sigma_1 = 100$МПа ; $\sigma_2 = -40$МПа; $\sigma_3 = -60$МПа

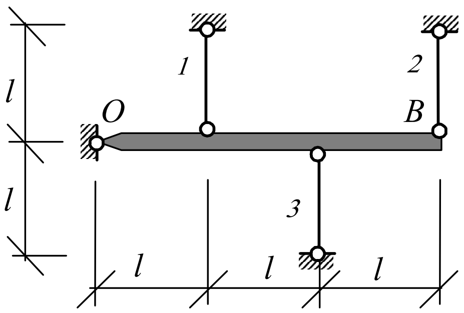
По энергетической теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{100 - (-40))^2 + (100 - (-60))^2 + (-40 - (-60))^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(140)^2 + (160)^2 + (20)^2} = \; 151 \text{ МПа} \; < R = 155\text{МПа}$$

Следовательно, прочность материала в точке обеспечена.

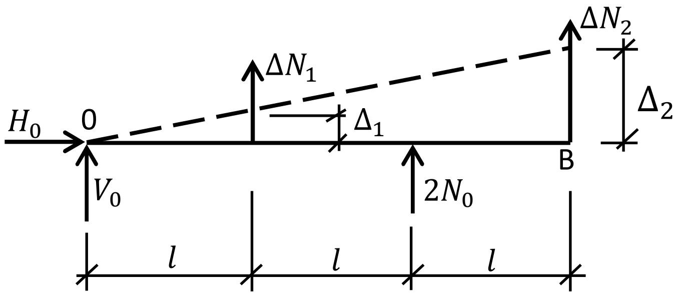


Задача № 2

В трёх одинаковых стержнях созданы растягивающие начальные усилия: $N_1 = N_2 = N_0$; $N_3 = 2N_0$. Определить усилия в стержнях 1 и 2, которые возникнут после удаления стержня 3.

Балку ***OB*** считать абсолютно жёсткой.

<u>Решение</u>



Удаление стержня 3 эквивалентно приложению в точке его крепления к балке усилия, равного $N_3 = 2\ N_0$, но противоположно направленного.

Найдём от его действия приращения усилий ΔN_1 и ΔN_2 в стержнях 1 и 2.

<u>С.С.З.</u> : $\sum m_0 = \Delta N_1 \cdot l + \Delta N_2 \cdot 3l + 2N_0 \cdot 2l = 0$ => $\Delta N_1 + 3\Delta N_2 + 4N_0 = 0$. (1)

<u>Г.С.З.</u>: $\Delta_2 = 3 \cdot \Delta_1$ $\Delta_1 = \Delta l_1$ $\Delta_2 = \Delta l_2$ => $\Delta_2 = 3 \cdot \Delta l_1$. (2)

<u>Ф.С.З.</u> : $\Delta l_1 = \dfrac{\Delta N_1 \cdot l}{EA}$ $\Delta l_2 = \dfrac{\Delta N_2 \cdot l}{EA}$, подставляя в (2), получаем $\Delta N_2 = 3 \cdot \Delta N_1$. (3)

Подставляем (3) в (1) : $\Delta N_1 + 3 \cdot 3\Delta N_1 + 4N_0 = 0$ => $\Delta N_1 = -0{,}4 \cdot N_0$ => $\Delta N_2 = -1{,}2 \cdot N_0$.

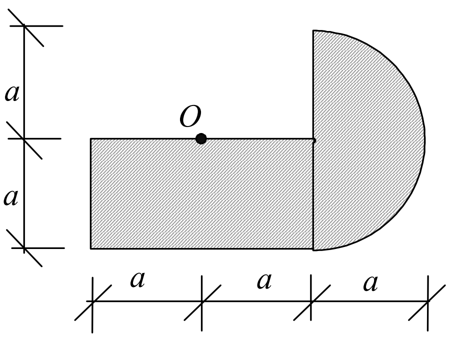
Суммируя усилия в стержнях, которые были в них до удаления стержня 3 ,

с полученными приращениями усилий получаем:

$N_1 = N_0 + \Delta N_1 = N_0 - 0{,}4N_0 = 0{,}6 \cdot N_0$ (растяжение),

$N_2 = N_0 + \Delta N_2 = N_0 - 1{,}2N_0 = -0{,}2 \cdot N_0$ (сжатие).

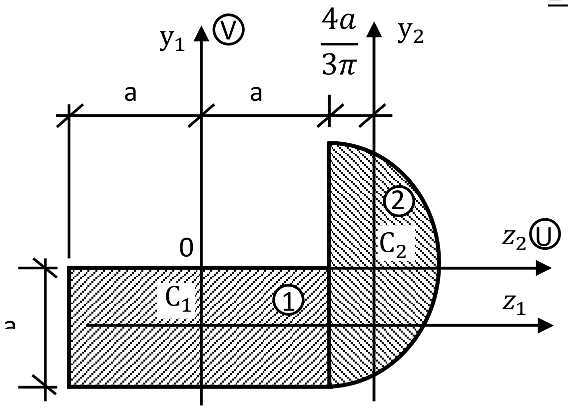
Ответ: $N_1 = 0{,}6 \cdot N_0$; $N_2 = -0{,}2 \cdot N_0$.



Задача № 3

Определить положение главных осей, проходящих через точку ***O***, и моменты инерции относительно этих осей (фигура показана на рисунке), размер a известен.

Решение



Заданная фигура состоит из:
прямоугольника ① и полукруга ②.
Оси y_1 и z_2 являются главными для всей фигуры, так как:
$\mathcal{J}^{①}_{y_1z_2} = 0$ ось y_1- ось симметрии для ①;
$\mathcal{J}^{②}_{y_1z_2} = 0$ ось z_2- ось симметрии для ② =>
=> $\mathcal{J}_{y_1z_2} = \mathcal{J}^{①}_{y_1z_2} + \mathcal{J}^{②}_{y_1z_2} = 0$.

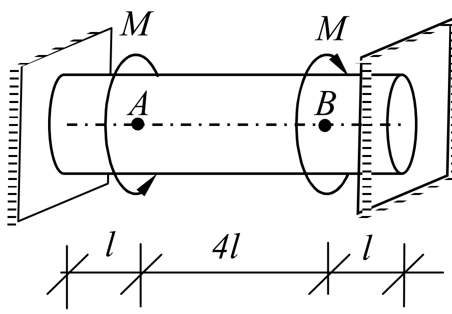
Обозначим главные оси U (совпадает с осью z_2) и V (совпадает с осью y_1).

$$\mathcal{J}_U = \mathcal{J}_U^{①} + \mathcal{J}_U^{②} = \underbrace{\left[\frac{2a\cdot a^3}{12} + a\cdot 2a\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}_{\mathcal{J}_U^{①}} + \underbrace{\frac{\pi a^4}{8}}_{\mathcal{J}_U^{②}} = (0{,}167 + 0{,}5)\cdot a^4 + 0{,}392a^4 = 1{,}059\cdot a^4.$$

$$\mathcal{J}_V = \mathcal{J}_V^{①} + \mathcal{J}_V^{②} = \underbrace{\frac{a\cdot(2a)^3}{12}}_{\mathcal{J}_V^{①} = 0{,}667\cdot a^4} + \underbrace{\underbrace{\left[\frac{\pi a^4}{8} - \frac{\pi a^2}{2}\left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2\right]}_{\mathcal{J}_{y_1}^{②} = 0{,}11\cdot a^4} + \underbrace{\frac{\pi a^2}{2}\cdot\left(a + \frac{4a}{3\pi}\right)^2}_{3{,}187\cdot a^4}}_{\mathcal{J}_V^{②}} = a^4\cdot(0{,}667 + 3{,}297) = 3{,}964\cdot a^4$$

Ответ: $\mathcal{J}_U = 1{,}059\cdot a^4$;
$\mathcal{J}_V = 3{,}964\cdot a^4$.

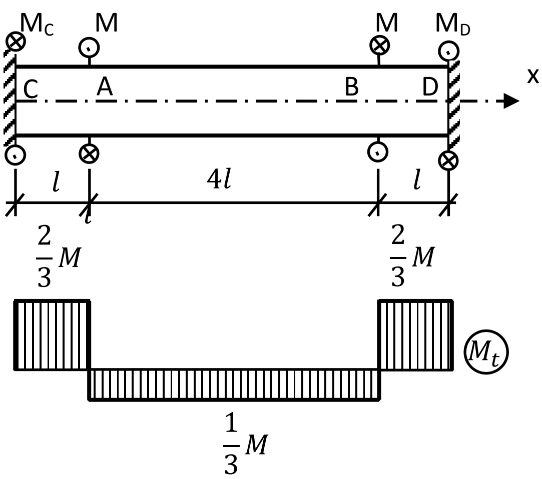
Задача № 4



Вал с круглым поперечным сечением диаметром $d = 4$ см нагружен моментами M, при этом взаимный угол закручивания сечений A и B $\varphi_{AB} = 0,01$ рад.

Определить наибольшее касательное напряжение, если известны модуль сдвига материала $G = 80 \cdot 10^3$ МПа и размер $l = 16$ см.

<u>Решение</u>



$$\sum m_x = M_D - M + M - M_C = 0 \Rightarrow M_D = M_C$$

$$\varphi_C = \frac{M_C \cdot 6l}{G \cdot \mathcal{J}_\rho} - \frac{M \cdot 5l}{G \cdot \mathcal{J}_\rho} + \frac{M \cdot l}{G \cdot \mathcal{J}_\rho} = 0 \Rightarrow$$

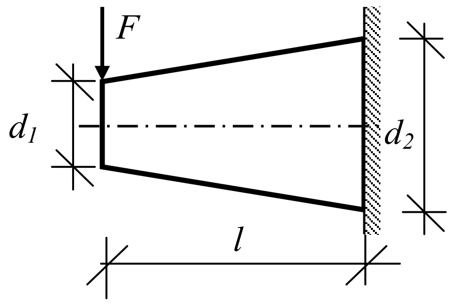
$$\Rightarrow M_C = M_D = \frac{2}{3}M \Rightarrow \text{Эпюра } M_t\,.$$

$$\varphi_{A-B} = \frac{\frac{1}{3}M \cdot 4l}{G \cdot \mathcal{J}_\rho} \Rightarrow M = \frac{3 \cdot \varphi_{AB} \cdot G \cdot \mathcal{J}_\rho}{4l}.$$

$$\tau_{max} = \frac{\frac{2}{3}M}{W_\rho} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \varphi_{AB} \cdot G \cdot \pi d^4 \cdot 16}{3 \cdot 4 \cdot l \cdot 32 \cdot \pi d^3} = \frac{\varphi_{AB} \cdot G \cdot d}{4l} = \frac{0{,}01 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04}{4 \cdot 0{,}16} =$$

$$= 50\text{МПа}.$$

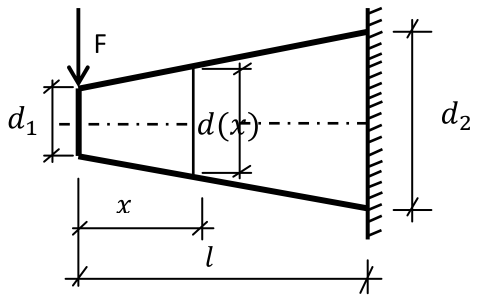
Ответ: $\tau_{max} = 50$МПа.



Задача № 5

Балка-консоль, загруженная силой на свободном конце, имеет форму усеченного кругового конуса с диаметрами оснований d_1 и d_2. При каких соотношениях d_1 и d_2 наибольшее нормальное напряжение возникает в заделке?

Решение



$$d(x) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot x = \frac{d_1 \cdot l + d_2 \cdot x - d_1 \cdot x}{l}; \quad M(x) = F \cdot x$$

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{F \cdot x}{\frac{\pi \cdot d^3(x)}{32}} = \frac{32 \cdot F \cdot l^3}{\pi} \cdot \frac{x}{(d_1 l + d_2 x - d_1 x)^3}$$

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = 0 => \left|\frac{x}{(d_1 \cdot l + d_2 . x - d_1 \cdot x)^3}\right|' =$$

$$= \frac{1 \cdot (d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0)^3 - 3 \cdot (d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0)^2 \cdot (d_2 - d_1) \cdot x_0}{(d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0)^6} = 0.$$

$$0 \le x \le l => (d_1 \cdot l + d_2 \cdot x - d_1 \cdot x) > 0 \ => d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0 - 3d_2 \cdot x_0 + 3d_1 \cdot x_0 = 0 =>$$

$$=> d_1 \cdot l - 2d_2 \cdot x_0 + 2d_1 \cdot x_0 = 0 => \ x_0 = \frac{d_1 \cdot l}{2(d_2 - d_1)}.$$

Чтобы $x_0 = l$ должно быть $\frac{d_1}{2(d_2 - d_1)} = 1 => d_1 = 2d_2 - 2d_1 => d_2 = 1{,}5d_1$.

Ответ: $d_2 = 1{,}5d_1$.