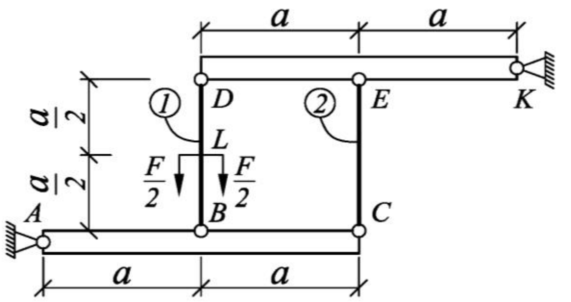
НГАСУ (Сибстрин)

Сопротивление материалов **Олимпиада – 2018**

Задача №1



Два жестких бруса соединены деформируемыми стержнями **1** *и* **2** *одинакового поперечного сечения площадью* **A.**

Найти $|\sigma|_{max}$ *в поперечных сечениях стержней* **1**, **2**.

Решение

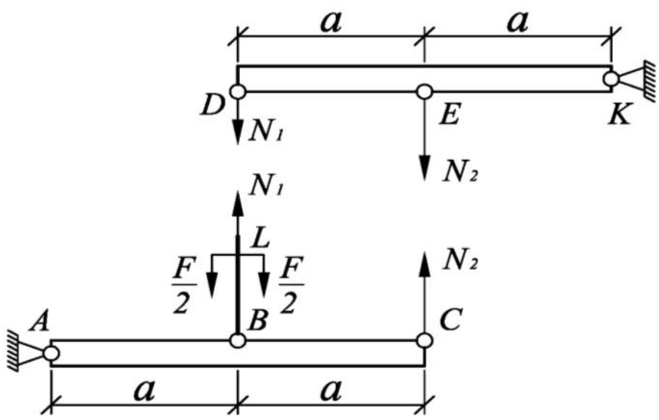


Рис. 1

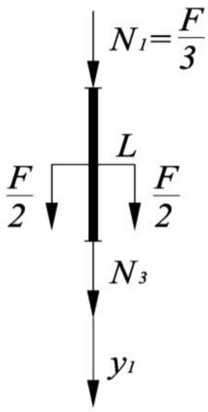


Рис. 2

Определение усилий в стержнях 1 и 2:

Уравнение равновесия относительно опоры *K* (Рис. 1):

$$\sum m_K = N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a = 0 \;\Rightarrow N_2 = -2N_1. \qquad (1)$$

Уравнение равновесия относительно опоры *A* (Рис. 1):

$$\sum m_A = N_2 \cdot 2a + N_1 \cdot a - F \cdot a = 0. \qquad (2)$$

С учётом (1) из (2) получаем: $-4N_1 \cdot a + N_1 \cdot a = F \cdot a \;\Rightarrow N_1 = -\dfrac{F}{3}.$ (3)

С учётом (3) из (1) получаем: $N_2 = \dfrac{2F}{3}.$

Уравнение равновесия вдоль оси y_1 (Рис. 2):

$$\sum y_1 = N_3 + F + \frac{F}{3} = 0 \quad \Rightarrow \; N_3 = -\frac{4F}{3}.$$

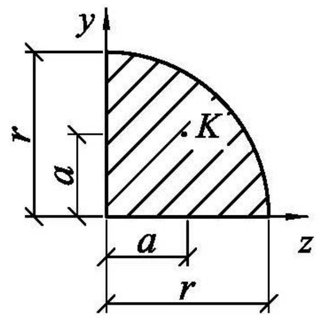
Определение напряжений в поперечных сечениях стержней 1 и 2:

Стержень 1, участок *D-L*: $\sigma_{D-L} = \dfrac{N_1}{A} = -\dfrac{F}{3A}.$

Стержень 1, участок *L-B*: $\sigma_{L-B} = \dfrac{N_3}{A} = -\dfrac{4F}{3A}.$

Стержень 2: $\sigma_2 = \sigma_{E-C} = \dfrac{N_2}{A} = \dfrac{2F}{3A}.$

Ответ: $|\sigma|_{max} = \left|\sigma_{L-B}\right| = \dfrac{4F}{3A}.$

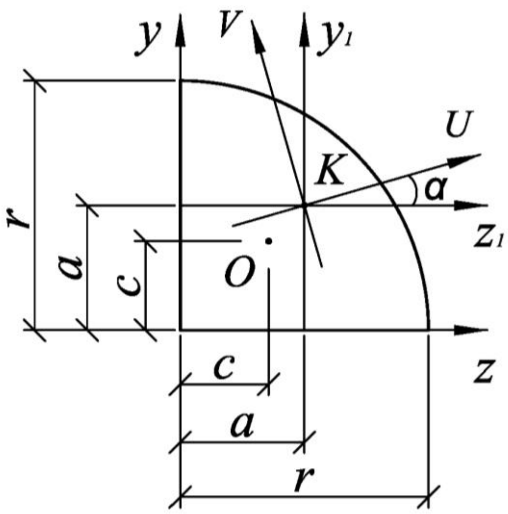


Задача №2

*Определить величину **a**, при которой любая ось, проходящая через точку **K** четверти круга радиуса **r**, является главной.*

$$I_z = I_y = \frac{\pi r^4}{16}; \quad I_{zy} = \frac{r^4}{8}.$$

<u>Решение</u>



Если любые проходящие через точку K оси U, V – главные, то при любом α должно выполняться условие:

$$I_{UV} = \frac{I_{z_1} - I_{y_1}}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{z_1 y_1} \cdot \cos 2\alpha = 0.$$

Но $I_{z_1} = I_{y_1}$, и тогда следует, что

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + (-a) \cdot S_z + (-a) \cdot S_y + (-a) \cdot (-a) \cdot A = 0. \quad (1)$$

О – центр тяжести четверти круга $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \frac{4r}{3\pi}.$$

$$A = \frac{\pi r^2}{4}; \quad S_z = S_y = A \cdot c = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}. \quad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получаем:

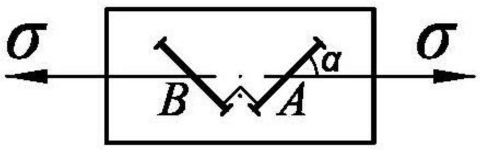
$$\frac{r^4}{8} - a \cdot \frac{r^3}{3} - a \cdot \frac{r^3}{3} + a^2 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - \frac{8r}{3\pi} \cdot a + \frac{r^2}{2\pi} = 0.$$

$$a_{1,2} = \frac{4r}{3\pi} \pm \sqrt{\frac{16r^2}{9\pi^2} - \frac{r^2}{2\pi}} = r \cdot \left(\frac{4}{3\pi} \pm \sqrt{\frac{32 - 9\pi}{18\pi^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cong 0,57r; \; a_2 \cong 0,28r.$$

Ответ: $a_1 \cong 0,57r; \; a_2 \cong 0,28r$.



Задача №3

*Пластина находится в линейном напряженном состоянии. На ней взаимно перпендикулярно установлены тензометры **A** и **B**. Обнаружено, что деформация* $\boldsymbol{\varepsilon_A} = 0$.

Найти деформацию $\boldsymbol{\varepsilon_B}$.

$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\sigma}$ *и* $\boldsymbol{\nu}$ *– заданы.*

<u>Решение</u>

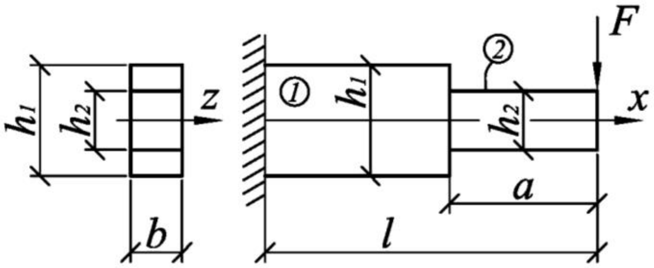
Главные напряжения и соответствующие им главные деформации равны:

$$\sigma_1 = \sigma;\quad \sigma_2 = 0;\quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma}{E};\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \nu\cdot\sigma_1\right] = -\frac{\nu\cdot\sigma}{E}.$$

$$\varepsilon_A + \varepsilon_B = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu\cdot\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}\cdot\left(1-\nu\right).$$

$$\varepsilon_A = 0 \Rightarrow \varepsilon_B = \frac{\sigma}{E}\cdot\left(1-\nu\right).$$

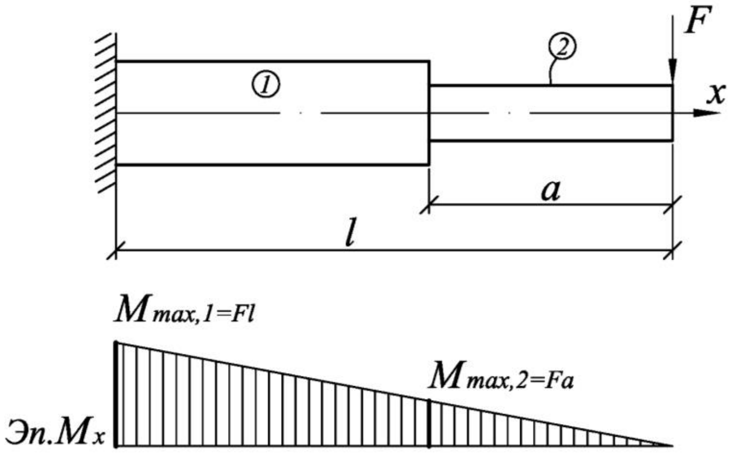
Ответ: $\varepsilon_B = \dfrac{\sigma}{E}\cdot\left(1-\nu\right)$.



Задача №4

Для консольной балки, выполненной из одного материала, определить соотношения ***h₁ / h₂*** *и* ***l / a****, удовлетворяющие условиям прочности по нормальным напряжениям, при которых вес балки постоянной ширины будет минимальным.*

<u>Решение</u>



$$W_{z,1}=\frac{bh_1^2}{6};\ W_{z,2}=\frac{bh_2^2}{6}.$$

Из условия прочности

$$\sigma_{\max,1}=\sigma_{\max,2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{M_{\max,1}}{W_{z,1}}=\frac{M_{\max,2}}{W_{z,2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{6Fl}{bh_1^2}=\frac{6Fa}{bh_2^2}\Rightarrow\frac{h_2^2}{h_1^2}=\frac{a}{l}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2=h_1\cdot\sqrt{\frac{a}{l}}\,. \quad (1)$$

Вес балки постоянной ширины будет минимальным при минимальной площади её боковой поверхности

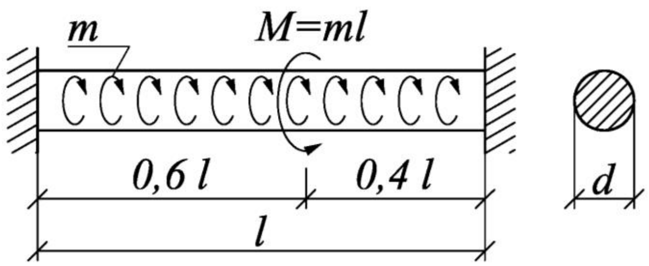
$$A=h_1\cdot(l-a)+h_2\cdot a=h_1\cdot(l-a)+h_1\cdot\sqrt{\frac{a}{l}}\cdot a=h_1\cdot\left(l-a+\frac{a^{3/2}}{\sqrt{l}}\right).$$

Условие минимума площади боковой поверхности

$$\frac{dA}{da}=h_1\cdot\left(-1+\frac{\frac{3}{2}\cdot a^{1/2}}{\sqrt{l}}\right)=0\ \Rightarrow\ -1+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{l}}=0\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{a}{l}}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \frac{l}{a}=\frac{9}{4}=2,25.$$

Из (1) $\frac{h_1}{h_2}=\sqrt{\frac{l}{a}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1,5.$

Ответ: $\frac{h_1}{h_2}=1,5;\ \ \frac{l}{a}=2,25.$

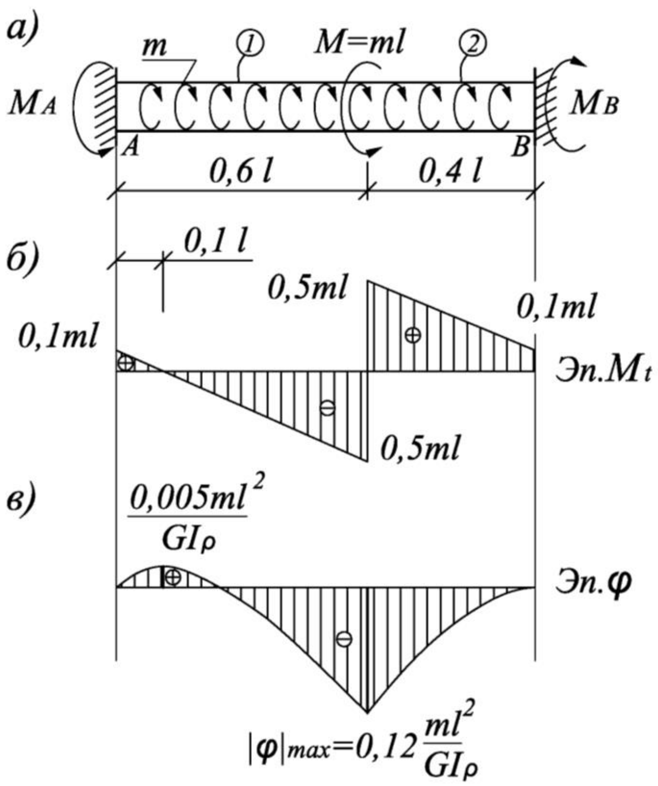


Задача №5

Определить отношение $\boldsymbol{l/d}$ *вала, при котором от показанной на рисунке нагрузки* $|\varphi|_{max}$ *= 0,05 рад.,* σ_{max} *= 100 МПа.*

$\boldsymbol{G}$ *= 0,8·10*^{5} *МПа.*

Решение



Реактивные моменты в опорах:

от равномерно распределенной моментной нагрузки m – $M_{A,1}$= =$M_{B,1}$=0,5ml;

от сосредоточенного момента M=ml – значения реактивных моментов обратно пропорциональны расстояниям от места приложения момента до опор – $M_{A,2}$=0,4ml, $M_{B,2}$=0,6ml. Они действуют в направлении, противоположном реактивным моментов от нагрузки.

Суммарные опорные реактивные моменты – M_A=0,1ml и M_B=0,1ml имеют противоположные направления.

Эпюра M_t показана на рис. б.

$$\sigma_{\max}=\tau_{\max}=\frac{|M_t|_{max}}{W_\rho}=100\ \text{МПа} \quad\Rightarrow\quad \frac{0{,}5ml\cdot\dfrac{d}{2}}{J_\rho}=100 \quad\Rightarrow\quad \frac{ml}{J_\rho}=\frac{400}{d}. \qquad (1)$$

$$\varphi_1(x)=\varphi_0+\int_0^x\frac{M_{t1}(x)}{GJ_\rho}dx,\quad \varphi_0=0,\quad M_{t1}(x)=0{,}1ml-mx \quad\Rightarrow\quad \varphi_1(x)=\left(0{,}1ml\cdot x-m\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{GJ_\rho}.$$

Локальный экстремум при $x_0=0{,}1l$: $\varphi_1(0{,}1l)=\left(0{,}1ml\cdot0{,}1l-m\dfrac{(0{,}1l)^2}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{GJ_\rho}=\dfrac{0{,}005ml^2}{GJ_\rho}$.

$$|\varphi|_{max}=|\varphi_1(0{,}6l)|=\left|\left(0{,}1ml\cdot0{,}6l-m\frac{(0{,}6l)^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{GJ_\rho}\right|=0{,}12\cdot\frac{ml^2}{GJ_\rho}=0{,}05. \qquad (2)$$

Из (2) с учётом (1) получаем $0{,}12\cdot\dfrac{400\cdot l}{Gd}=0{,}05 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{l}{d}=\dfrac{0{,}005\cdot0{,}8\cdot10^5}{0{,}12\cdot400}=\dfrac{250}{3}=83{,}33.$

Ответ: $\dfrac{l}{d}=83{,}33.$