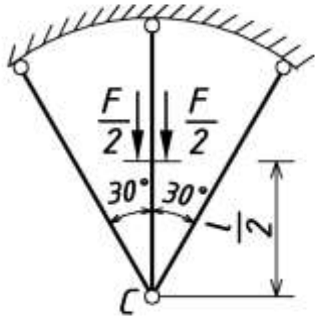
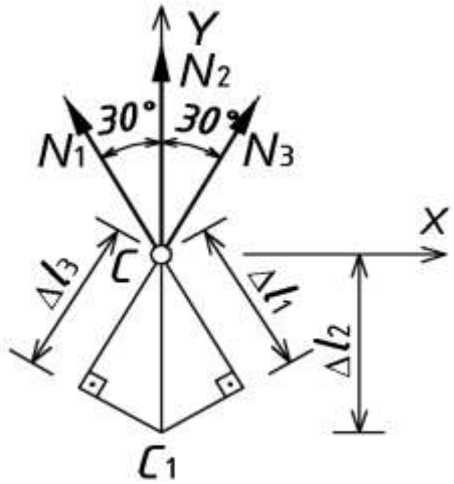
Задача №1



*Плоская стержневая система из трех одинаковых стержней загружена силой **F**. Длины стержней **l**, площади их поперечных сечений **A**, модуль упругости материала стержней **E**.*

*Определить перемещение узла **C**.*

Решение



Для решения данной статически неопределимой задачи составляем уравнения, рассматривая ее статическую, физическую и геометрическую стороны.

ССЗ:

$$\sum x = N_3 \cdot \sin 30^0 - N_1 \cdot \sin 30^0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 = N_1 \Rightarrow \Delta l_3 = \Delta l_1;$$

$$\sum y = N_2 + 2 \cdot N_1 \cdot \cos 30^0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 = -2 \cdot N_1 \cdot \cos 30^0 = -\sqrt{3} \cdot N_1. \quad (1)$$

ГСЗ: $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos 30^0 \Rightarrow \Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$

ФСЗ: $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 \cdot l}{EA}; \quad \Delta l_2 = \dfrac{N_2 \cdot 0{,}5l}{EA} + \dfrac{(N_2 + F) \cdot 0{,}5l}{EA}. \quad (3)$

Подставляем (3) в (2), сокращаем на $\dfrac{l}{EA}$ и получаем:

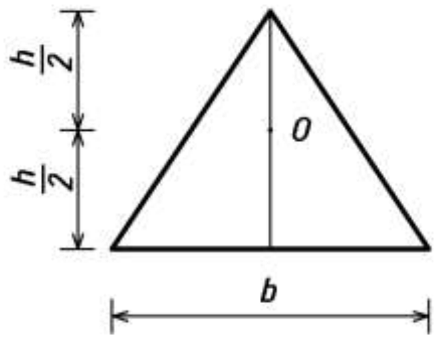
$$N_1 = N_2 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F \cdot 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N_1 - N_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (4)$$

Из (4) и (1) получаем: $N_1 = F \cdot \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 + \frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{10} F; \quad N_2 = -\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{10} \cdot F = -0{,}3F.$

Узел С перемещается вертикально вниз, его перемещение равно:

$$V_C = CC_1 = \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^0} = \frac{N_1 \cdot l}{EA \cdot \cos 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{10} F \cdot l}{EA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}2 \cdot \frac{F \cdot l}{EA}.$$

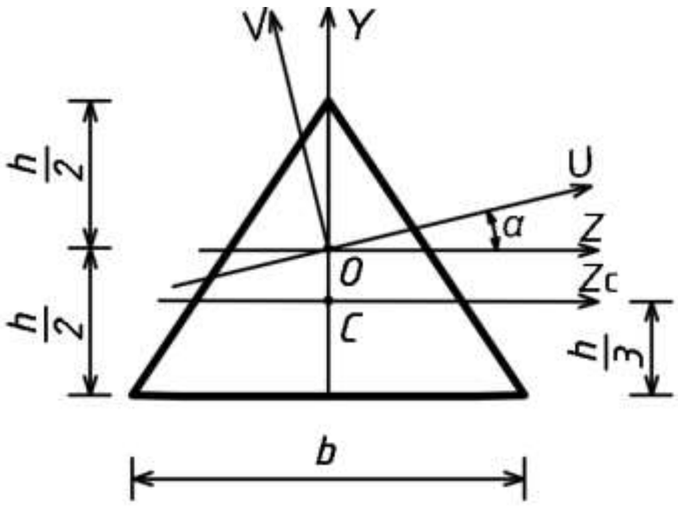
Ответ: $V_C = 0{,}2 \cdot \dfrac{F \cdot l}{EA}.$



Задача №2

При каком отношение ***h/b*** *все оси, проходящие через середину высоты равнобедренного треугольника (точка 0), будут главными?*

<u>Решение</u>



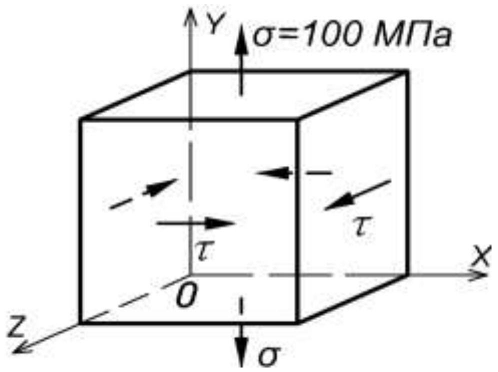
По условию задачи центробежный момент инерции сечения относительно любых взаимно ортогональных осей U и V, проходящих через точку *0*, равен нулю: $J_{UV} = \frac{J_Z - J_Y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{ZY} \cdot \cos 2\alpha = 0.$

Так как Y – ось симметрии, то $J_{ZY} = 0$, следовательно:

$\frac{J_Z - J_Y}{2} \cdot \sin 2\alpha = 0.$ Но $\sin 2\alpha \neq 0 \Rightarrow J_Z = J_Y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3}\right)^2 = \frac{h \cdot b^2}{48} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,707.$$

Ответ: $\frac{h}{b} \cong 0,707.$



Задача №3

Каким должно быть значение касательных напряжений $\boldsymbol{\tau}$*, чтобы* $\boldsymbol{\tau}_{max}$ *в материале не превзошло 80 МПа?*

Решение

Отсутствие касательных напряжений говорит о том, что площадки, ортогональные оси *Y*, – главные и, следовательно, $\sigma_Y = \sigma = 100\,\text{МПа}$ – главное напряжение.

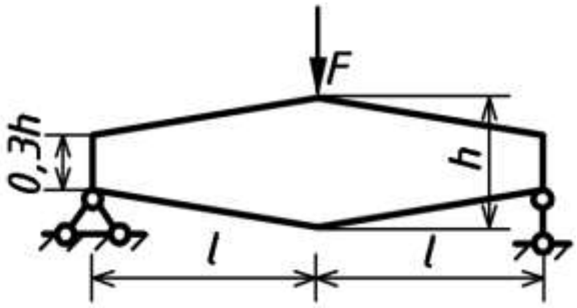
Два других главных напряжения в плоскости X0Z, где имеет место чистый сдвиг, равны:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_X + \sigma_Z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_X - \sigma_Z)^2 + 4\cdot\tau_{XZ}^2} = \frac{0+0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4\cdot\tau^2} = \pm\tau.$$

Тогда главные напряжения в материале равны:
$\sigma_1 = 100\,\text{МПа}$; $\sigma_2 = \tau$; $\sigma_3 = -\tau$.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{100-(-\tau)}{2} = \frac{100+\tau}{2} \le 80\,\text{МПа} \;\Rightarrow\; \tau \le 60\,\text{МПа}.$$

Ответ: $\tau \le 60\,\text{МПа}.$

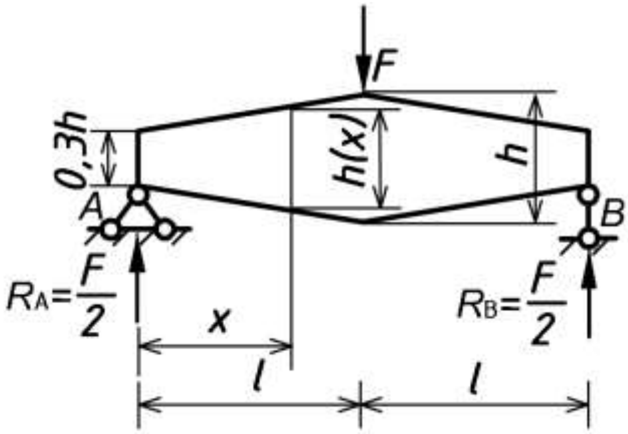


Задача №4

Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размер ***h*** *заданной балки прямоугольного поперечного сечения переменной высоты с постоянной шириной* ***b****=0,4****h*****.**

F*=20кН,* ***R****=150МПа,* ***l****=3м.*

Решение



Определим положение опасного сечения $X=X_o$ с наибольшими напряжениями $\sigma_{max}=\dfrac{M(x_o)}{W(x_o)}$.

$$M(x)=\frac{F}{2}\cdot x;\quad h(x)=(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})\cdot h\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x)=\frac{b\cdot h^2(x)}{6}=\frac{b\cdot h^2}{6}\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sigma(x)=\frac{M(x)}{W(x)}=\frac{3F}{b\cdot h^2}\cdot\frac{x}{(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})^2}.$$ Исследуем функцию на экстремум:

$$\frac{d\sigma(x)}{dx}=\frac{3F}{b\cdot h^2}\cdot\frac{1\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})^2-x\cdot2\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})\cdot\frac{0{,}7}{l}}{(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})^4}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l}-1{,}4\cdot\frac{x}{l})}{(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})^4}=0\ \Rightarrow\frac{(0{,}3-0{,}7\cdot\frac{x}{l})}{(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x}{l})^3}=0\ \Rightarrow$$

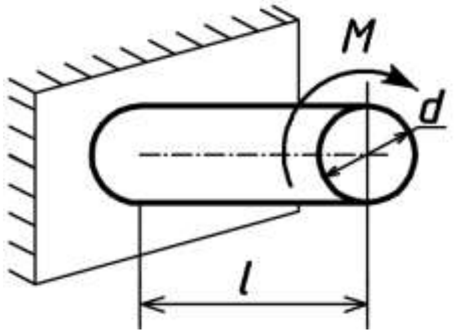
$$\Rightarrow\ 0{,}3-0{,}7\cdot\frac{x}{l}=0\Rightarrow x=x_o=\frac{3}{7}\cdot l\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sigma_{max}=\sigma_{(\frac{3}{7}l)}=\frac{3F}{b\cdot h^2}\cdot\frac{\frac{3}{7}\cdot l}{(0{,}3+0{,}7\cdot\frac{3\cdot l}{7\cdot l})^2}=3{,}57\cdot\frac{F\cdot l}{b\cdot h^2}=3{,}57\cdot\frac{F\cdot l}{0{,}4h\cdot h^2}=8{,}93\cdot\frac{F\cdot l}{h^3}.$$

Из условия прочности:

$$\sigma_{max}\le R\Rightarrow 8{,}93\cdot\frac{F\cdot l}{h^3}\le150\cdot10^3\ \text{кПа}\Rightarrow h\ge\sqrt[3]{\frac{8{,}93\cdot20\cdot3}{150\cdot10^3}}\cong153\cdot10^{-3}\text{м}\cong153\text{мм}.$$

Ответ: $h\ge153$мм.



Задача №5

*Вал имеет такие размеры, что при скручивании его моментом **M** на угол 45^0 наибольшие нормальные напряжения равны $\boldsymbol{\sigma}_{max}$=100 МПа. Модуль сдвига материала вала **G**=0,8·10^5 МПа.*

*Определить отношение **l/d**.*

<u>Решение</u>

При кручении вала на его поверхности имеет место деформация чистого сдвига, при которой:

$$\sigma_{max} = \tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M \cdot d}{2 \cdot J_p} \Rightarrow \frac{M}{J_p} = \frac{2 \cdot \sigma_{max}}{d}; \qquad (1)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p} \Rightarrow \frac{M}{J_p} = \frac{\pi \cdot G}{4 \cdot l}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $\frac{2 \cdot \sigma_{max}}{d} = \frac{\pi \cdot G}{4 \cdot l} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{l}{d} = \frac{\pi \cdot G}{8 \cdot \sigma_{max}} = \frac{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 10^5}{8 \cdot 100} = 100 \cdot \pi \cong 314.$$

Ответ: $\frac{l}{d} \cong 314.$