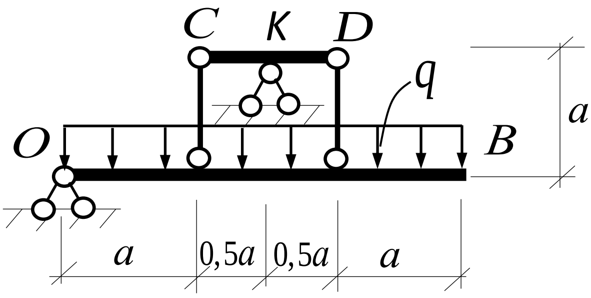
НГАСУ (Сибстрин)

Сопротивление материалов ***Олимпиада – 2023***

Задача № 1



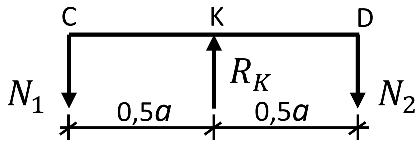
Два абсолютно жёстких бруса ***OB*** и ***CD*** соединены между собой упругими стержнями, выполненными из одного материала с модулем упругости ***E*** и имеющими равные площади поперечных сечений ***A***.

Определить перемещение точки ***B***.

<u>Решение</u>

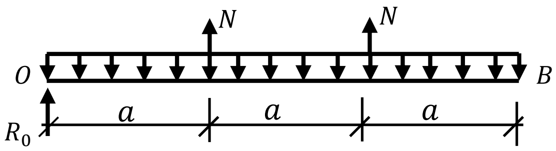
Из условия равновесия CD:

$$\sum m_K = N_1 \cdot 0{,}5a - N_2 \cdot 0{,}5a = 0 => \ N_1 = N_2 = N.$$



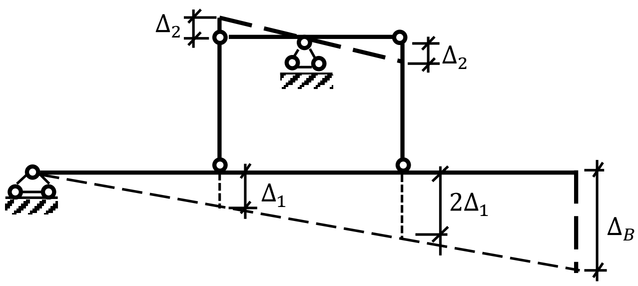
Так как $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}$ и $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$, то $\Delta\, l_1 = \ \Delta\, l_2 = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \Delta l.$

Из условия равновесия OB:



$$\sum m_o = N \cdot a + N \cdot 2a - q \cdot 3a \cdot 1{,}5a = 0 =>$$

$$=> N = 1{,}5 \cdot q \cdot a.$$



$$\Delta l_1 = \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta l = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{1{,}5 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}, \qquad (1)$$

$$\Delta l_2 = 2\Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{1{,}5 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2) получаем:

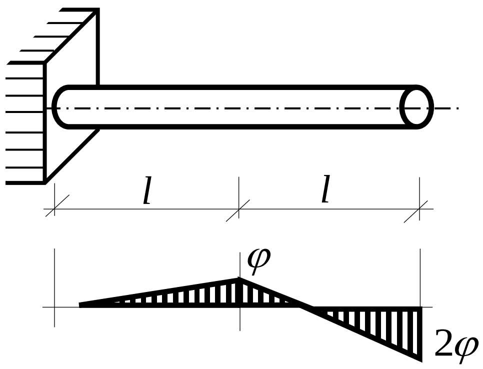
$$3\Delta_1 = \frac{3 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A} => \qquad \Delta_1 = \frac{q \cdot a^2}{E \cdot A}.$$

Перемещение точки B:

$$U_B = \Delta_B = 3\Delta_1 = \frac{3 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot A}.$$

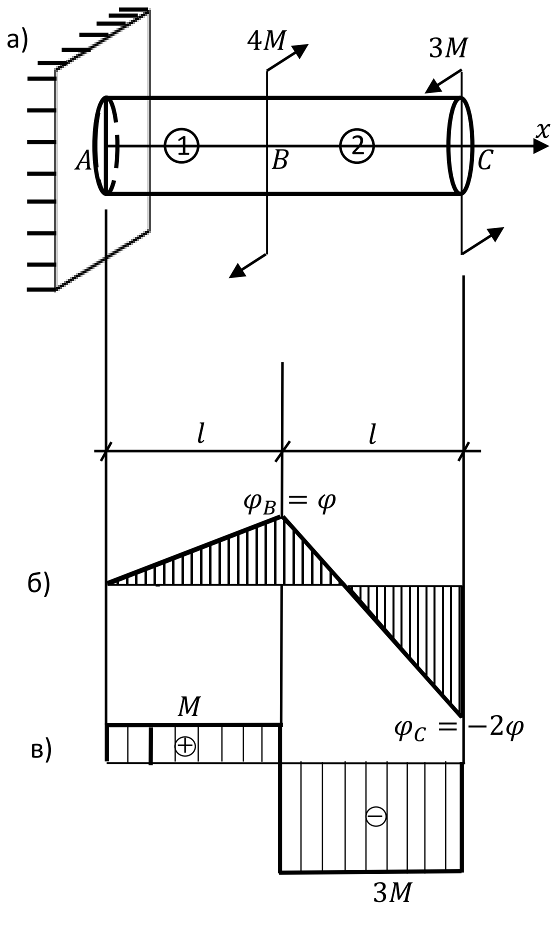
Ответ: $U_B = \dfrac{3 \cdot q \cdot a^2}{E \cdot}.$

Задача № 2



По заданной эпюре углов закручивания $\boldsymbol{\varphi}$ представить схему загружения вала и построить эпюру крутящихся моментов. Жесткость поперечного сечения стержня на кручение $\boldsymbol{GI}_{\rho}$ по длине стержня постоянна.

<u>Решение</u>



По эпюре углов закручивания на рис. б:

$$\varphi_{\text{В}} = \varphi_A + \varphi_{A-B} = 0 + \frac{M_{t1} \cdot l}{GI_{\rho}} = \varphi \quad =>$$

$$=> \quad \text{M}_{t1} = \frac{GI_{\rho}}{l} \cdot \varphi.$$

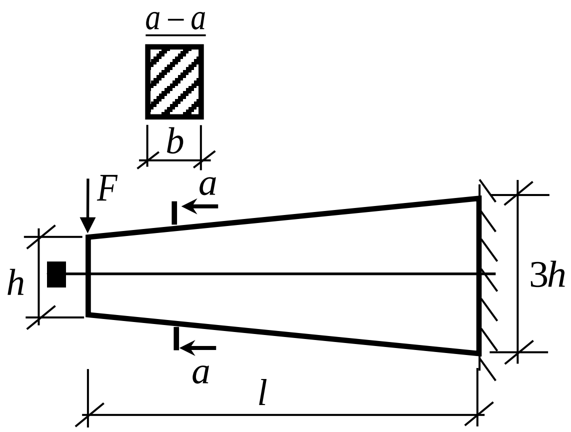
$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{B-C} = \varphi + \frac{M_{t2} \cdot l}{GI_{\rho}} = -2\varphi \quad =>$$

$$=> \quad \text{M}_{t2} = -3\frac{GI_{\rho}}{l} \cdot \varphi.$$

Примем $M_{t1} = M => M_{t2} = -3M -$ эпюра M_t

показана на рис. в.

Схема загружения представлена на рис. а.

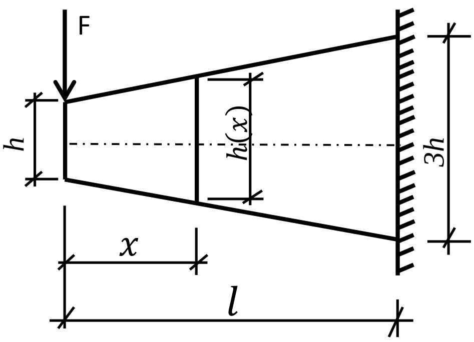


Задача № 3

Консольная балка прямоугольного сечения загружена на конце силой $\boldsymbol{F}$. Ширина балки постоянна и равна $\boldsymbol{b}$, а высота меняется по линейному закону от $\boldsymbol{h}$ до $3\boldsymbol{h}$.

Установить положение опасного по нормальным напряжениям сечения и определить величину σ_{max}

Решение



Определим положение опасного сечения $x = x_o$ с наибольшими напряжениями $\sigma_{max} = \dfrac{M(x_o)}{W(x_o)}$.

$$M(x) = F \cdot x; \quad h(x) = h \cdot (1 + \frac{2 \cdot x}{l}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{b \cdot h^2(x)}{6} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot (1 + \frac{2 \cdot x}{l})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{6F}{b \cdot h^2} \cdot \frac{x}{(1 + \frac{2 \cdot x}{l})^2}.$$

Исследуем функцию на экстремум:

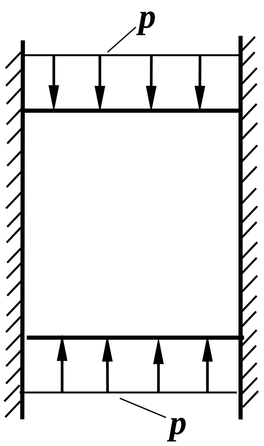
$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \frac{6F}{b \cdot h^2} \cdot \frac{1 \cdot (1 + \frac{2 \cdot x_0}{l})^2 - x_0 \cdot 2 \cdot (1 + \frac{2 \cdot x_0}{l}) \cdot \frac{2}{l}}{(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l})^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l}) \cdot (1 + \frac{2 \cdot x_0}{l} - 4 \cdot \frac{x_0}{l})}{(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l})^4} = 0 \Rightarrow \frac{(1 - 2 \cdot \frac{x_0}{l})}{(1 + \frac{2 \cdot x_0}{l})^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cdot \frac{x_0}{l} = 0 \Rightarrow x = x_o = 0{,}5l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} = \sigma(x_0 = 0{,}5l) = \frac{6F}{b \cdot h^2} \cdot \frac{0{,}5l}{(1 + \frac{2 \cdot 0{,}5l}{l})^2} = 0{,}75 \cdot \frac{F \cdot l}{b \cdot h^2}.$$

Ответ: $x_o = 0{,}5l; \; \sigma_{max} = 0{,}75 \cdot \dfrac{F \cdot l}{b \cdot h^2}.$

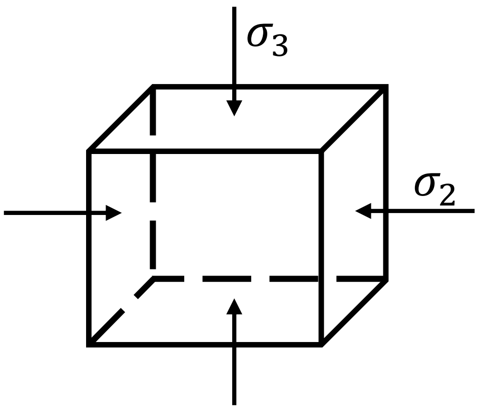


Задача № 4

Прямоугольный параллелепипед, находящийся между двумя неподвижными стенками и плотно соприкасающийся с ними, сжимается по вертикали давлением ***p***. Определить относительное изменение объема параллелепипеда. Трением о стенки пренебречь

E и **ν** материала заданы.

Решение



В материале параллелепипеда возникает напряженное

состояние:

$\sigma_1=0$; $\sigma_2 = ?$; $\sigma_3 = -\mathrm{p}$.

Из обобщённого закона Гука:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)] =$$

$$= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (0 - \mathrm{p})] = 0 =>$$

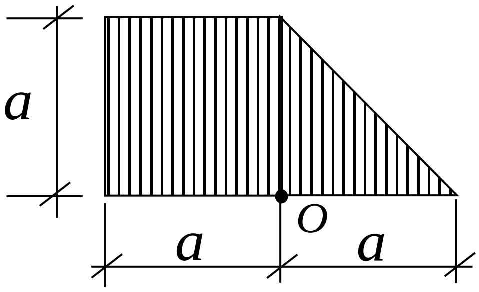
$$=> \sigma_2 = -\nu \cdot \mathrm{p}.$$

Относительное изменение объёма параллелепипеда:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (0 - \nu \cdot \mathrm{p} - \mathrm{p}) = - \frac{(1-2\nu)\cdot(1+\nu)}{E} \cdot \mathrm{p}\ .$$

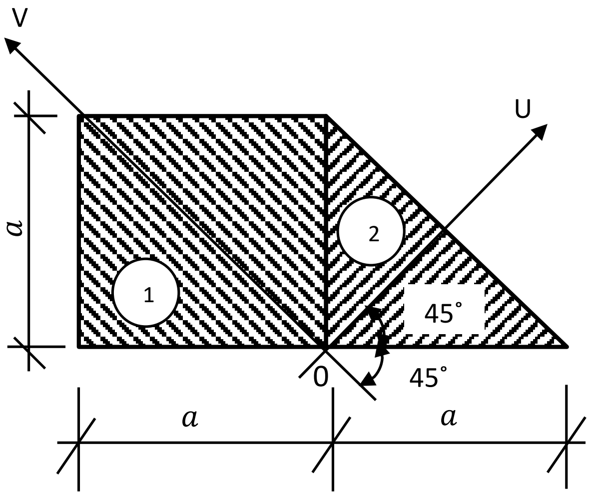
– объём уменьшается

Ответ: $\theta = -\frac{(1-2\nu)\cdot(1+\nu)}{E}\ \mathrm{p}.$



Задача № 5

Определить осевые моменты инерции представленной фигуры относительно главных осей, проходящих через точку ***O***.



Решение

Проведем через точку O оси U и V.

Для квадрата 1 ось V – ось симметрии, поэтому $\mathcal{J}_{UV}^{1} = 0$.

Для равнобедренного треугольника 2 ось U – ось симметрии, поэтому $\mathcal{J}_{UV}^{2} = 0$.

Для всего сечения $\mathcal{J}_{UV} = \mathcal{J}_{UV}^{1} + \mathcal{J}_{UV}^{2} = 0$,

следовательно, U и V – главные оси.

$$\mathcal{J}_u = \mathcal{J}_u^{1} + \mathcal{J}_u^{2} = \left[\frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{12} = a^4 \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}\right] =$$

$$= a^4 \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{8} \cdot a^4.$$

$$\mathcal{J}_V = \mathcal{J}_V^{1} + \mathcal{J}_V^{2} = \frac{a^4}{12} + \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^3 = a^4 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{24} \cdot a^4 .$$

Ответ: $\mathcal{J}_u = \mathcal{J}_{max} = \frac{5}{8} a^4$; $\mathcal{J}_V = \mathcal{J}_{min} = \frac{5}{24} a^4$.