ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс теоретической механики нельзя освоить, не решая задачи. Более того, навыки решения задач пригодятся при изучении любых других предметов и при решении практически любых проблем, с которыми придется столкнуться в жизни. Закономерности, алгоритмы решения практически всех задач почти одинаковы, и ими надо овладеть. Развитию этих навыков и посвящено данное пособие. Оно содержит двенадцать индивидуальных заданий по основным темам статики. Предваряется пособие кратким изложением основ статики. Здесь практически нет доказательств теорем, но приводятся все необходимые для решения задач сведения, от аксиом статики и понятия связей до основной теоремы статики (теоремы Пуансо) и приведения системы сил к простейшему виду. Для каждого из заданий дан пример его выполнения. Освоение курса, конечно, требует и чтения учебников.

Все задачи в данных индивидуальных заданиях фактически имеют четкий алгоритм решения, который приводится в разделе 8. В этом смысле данные задачи являются скорее упражнениями, хотя их выполнение требует, конечно, систематического анализа и умения делать правильные выводы. Особое место занимает задание 5, которое содержит элементы научных исследований в данной предметной области. Несмотря на это, по уровню сложности оно практически соответствует всем остальным.

В литературе известно прекрасное учебное пособие, содержащее индивидуальные задания по всему курсу теоретической механики, выполненное коллективом авторов под редакцией Яблонского А.А.[*] Авторский коллектив данного пособия, конечно, не избе-

---

[*] Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А.Яблонского. – М., 1998.

жал влияния указанной работы. Есть, однако, и достаточно существенные различия. Пособие под редакцией Яблонского А.А. было ориентировано главным образом на машиностроительные специальности, что диктовало и достаточно специфический подбор задач. Данное же пособие ориентировано на студентов строительных вузов. Поэтому, например, такое большое внимание уделяется расчету фермы или определению реакций простейших строительных конструкций.

При составлении данного пособия нами были использованы методические указания и индивидуальные задания, разработанные в последние пятнадцать лет на кафедре теоретической механики НГАСУ. Все эти задания для целей данного пособия были переработаны или составлены заново. Тем не менее мы выражаем глубокую признательность И.М. Бондарю, А.И. Глыниной, В.Л. Окулову, И.А. Палымскому, В.Н. Попову, которые не участвовали в составлении данного пособия.

ОСНОВЫ СТАТИКИ

1. Аксиомы статики

1.1. Задачи статики. Теоретическая механика изучает движение тел при их взаимодействии с другими телами. Под *движением* понимается изменение положения тела в пространстве со временем относительно некоторого другого тела, с которым связывается система отсчета. Если же положение тела не меняется, то говорят, что оно находится в покое. Равновесием же называется состояние покоя либо равномерного и прямолинейного движения. Таким образом, состояние покоя является частным случаем равномерного и прямолинейного движения. Раздел механики, изучающий условия равновесия, называется *статикой.*

В качестве *тел* рассматриваются материальные точки, абсолютно твердые тела, а также конструкции, из них состоящие. Мерой взаимодействия тел является сила, являющаяся векторной величиной. Ее действие характеризуется модулем, направлением и точкой приложения. Введение понятия силы позволяет свести задачу о движении тела при его взаимодействии с другими телами к задаче о движении тела под действием приложенной к нему системы сил.

В статике решаются *две основные задачи*. *Первая* состоит в замене данной системы сил эквивалентной ей системой сил, *вторая* же заключается в формулировании условий равновесия тела под действием данной системы сил.

Если система сил эквивалентна одной силе, ее называют *равнодействующей.* Система называется *уравновешенной*, когда тело под ее действием находится в равновесии.

1.2. Аксиомы статики. Статика формулируется на основе следующих *аксиом*.

Аксиома 1. *Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю, противоположно направлены и линии их действия совпадают.*

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.*

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). *Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную их геометрической сумме*

Аксиома 4 (третий закон Ньютона). *Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по модулю, противоположны по направлению и линии их действия совпадают.*

Аксиома 5 (принцип отвердевания). *Если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится при замене исходного тела или его части абсолютно твердым.*

Следствия аксиом

1. *Точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.*

2. *Внутренние силы, действующие на абсолютно твердое тело, взаимно уравновешиваются.*

1.3. Связи, реакции связей, аксиома связей. Тело называется *свободным,* если оно может совершать любое перемещение в пространстве. На движение рассматриваемого тела могут накладывать ограничения другие тела, которые называются *связями.* Сила, с которой связь действует на тело, называется *силой реакции связи.* Эта сила направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться данному телу. Силы, не являющиеся реакциями связей, называют *активными*. Приведем типы связей, используемых в дальнейшем.

1. *Гладкая поверхность (без трения).* Связь не дает перемещаться телу по направлению общей нормали к соприкасающимся в точке касания поверхностям, реакция связи направлена по этой нормали (рис. 1.1).

2. *Гладкая поверхность с угловой точкой (ребро).* Реакция связи перпендикулярна опирающейся поверхности, поскольку вдоль этой поверхности гладкое ребро не препятствует движению (рис. 1.2).

3. *Идеальная нить (гибкая, невесомая, нерастяжимая,* рис. 1.3). Нить не дает телу двигаться вдоль линии AB от точки подвеса. Реакция N поэтому направлена вдоль AB к точке подвеса.

4. *Подвижный цилиндрический шарнир* (рис. 1.4). Поскольку этот тип связи не препятствует движению в направлении поверхности опирания, то сила реакции всегда направлена по нормали к ней.

5. *Неподвижный цилиндрический шарнир.* В простейшем случае представляет собой болт, на который засажена втулка, жестко скрепленная со связуемым телом (рис. 1.5). Сила реакции может иметь любое направление в плоскости чертежа, а поэтому ее ищут в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих $\mathbf{N}_{Ax}$ и $\mathbf{N}_{Ay}$ (связь не дает телу перемещаться ни вдоль оси Ax, ни вдоль оси Ay). 6. *Неподвижный сферический шарнир.* Тело, укрепленное при помощи *сферического шарнира*, может вращаться вокруг точки крепления, но ему запрещены поступательные движения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. В соответствии с этим направление реакции $\mathbf{N}$ не определено, и она может быть представлена тремя взаимно перпендикулярными составляющими $\mathbf{N}_x$, $\mathbf{N}_y$, $\mathbf{N}_z$ (рис. 1.6).

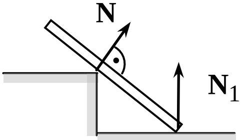


Рис. 1.2

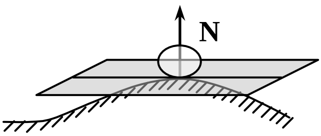


Рис. 1.1

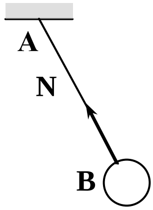


Рис. 1.3

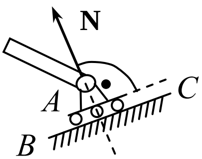


Рис. 1.4

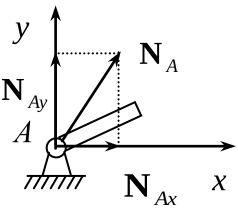


Рис. 1.5

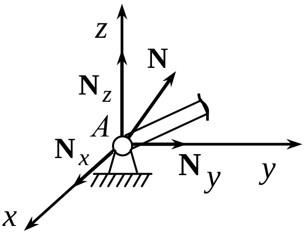


Рис. 1.6

7. Идеальный стержень (жесткий, невесомый стержень, на концах которого шарниры, рис. 1.7). Такая связь не мешает конструкции перемещаться перпендикулярно стержню, поэтому сила реакции направлена вдоль него.

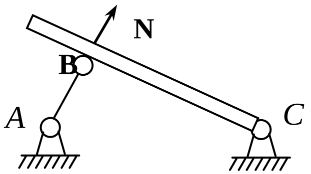


Рис. 1.7.

Аксиома 6. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие силами реакций связей.*

2. Система сходящихся сил

Системой сходящихся сил (ССС) называется *система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке*.

2.1. Теорема о равнодействующей ССС. *Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и проходящую через точку пересечения их линий действия*.

2.2. Условия равновесия ССС. *Тело, на которое действует система сходящихся сил* ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$), *находится в равновесии, если их равнодействующая равна нулю,* $\mathbf{R} = 0$, или

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \; R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

Для плоской системы сходящихся сил (в плоскости xOy) условия равновесия сводятся к следующим:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$$

Геометрически условие означает, что *многоугольник данных сил* является замкнутым.

2.3. Теорема о трех силах. *Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, причем линии действия двух из них пересекаются, то это система сходящихся сил.*

2.4. Статически определимые и статически неопределимые задачи. Если в данной задаче число неизвестных величин не превышает числа линейно независимых уравнений равновесия, то она называется статически определимой, в противном случае – статически неопределимой.

3. Система параллельных сил

Силы, линии действия которых параллельны, образуют *систему параллельных сил*.

3.1. Теоремы о сложении двух параллельных сил

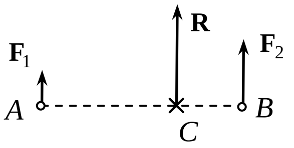


Рис. 3.1

Теорема 1. *Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, которая по модулю равна сумме модулей данных сил, параллельна им и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит через точку C, которая делит отрезок AB внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям данных сил* (рис. 3.1).

Теорема 2. *Система двух не равных по модулю сил, линии действия которых параллельны, но силы направлены противоположно, имеет равнодействующую, которая равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку C, которая лежит на продолжении отрезка AB и делит его внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил* (рис. 3.2).

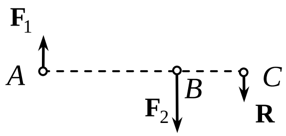


Рис. 3.2

3.2. Центр системы параллельных сил. Равнодействующая системы n параллельных сил ($\mathbf{P}_1,...,\mathbf{P}_n$), направленных в одну сторону, равна их сумме $\mathbf{R}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i$ и приложена в точке C, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}_C = R^{-1}\sum_{i=1}^{n}P_i\mathbf{r}_i$. Точка C называется *центром параллельных сил.* Если повернуть данные силы на один и тот же угол, сохраняя их точки приложения, то и равнодействующая этих сил повернется на тот же угол, причем положение центра параллельных сил не изменится.

3.3. Центр тяжести и методы его определения. *Точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на тело, называется центром тяжести тела.* Радиус-вектор центра тяжести определяется формулой $\mathbf{r}_C = P^{-1}\sum_{i=1}^{n} p_i\mathbf{r}_i$, $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$, где $\mathbf{r}_i$ – радиус-векторы точек приложения сил тяжести p_i, действующих на элемент объема V_i данного тела. Ниже даны методы определения центра тяжести.

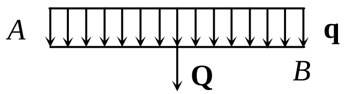
1. *Метод симметрии.* Если однородное тело имеет плоскость или ось симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии. Если же тело имеет центр симметрии, то его центр тяжести находится в этом центре.

2. *Метод разбиений.* Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то центр тяжести всего тела определяется по формуле $\mathbf{r}_C = P^{-1}\sum_{i=1}^{n} P_i\mathbf{r}_{C_i}$, где $P_1,\ldots,P_n$ – веса соответствующих частей тела, P – их сумма, а $\mathbf{r}_{C_1},\mathbf{r}_{C_2},...,\mathbf{r}_{C_n}$ – радиус-векторы центров тяжести этих частей.

3. *Метод дополнений (отрицательных весов).* Этот метод является частным случаем метода разбиений. Он применяется к телам, имеющим вырезы. Пусть тело, вес которого P , имеет полость заданного объема V . Если бы тело не имело полости, то его вес был бы равен $P' = P + P_{\mathrm{v}}$, где P_{v} – вес объема V . Радиус-вектор центра тяжести такого тела (без полости) определяется так $\mathbf{r}'_C = (\mathbf{r}_C P + \mathbf{r}_{C\mathrm{v}}P_{\mathrm{v}})/P'$.Отсюда сразу следует, что радиус-вектор центра тяжести исходного тела (с полостью) $\mathbf{r}_C$ равен $\mathbf{r}_C = (\mathbf{r}'_C P' - \mathbf{r}_{C\mathrm{v}}P_{\mathrm{v}})/P$.

3.4. Распределенные силы. Силу, приложенную в точке, называют *сосредоточенной.* Силы же, распределенные по определенному закону по некоторому объему, поверхности или линии, называют *распределенными* (*распределенными нагрузками*). Если распределенная нагрузка представляет собой систему параллельных сил, то определение ее равнодействующей проводится так же, как и для сил тяжести. В частности, если сила равномерно с интенсивностью q распределена вдоль отрезка прямой $AB = L$ (рис. 3.3а), то ее равнодействующая равна $Q = qL$ и приложена в середине отрезка AB. Если силы распределены по линейному закону (рис. 3.3б) так что основание снова равно $AB = L$, то $Q = qL/2$, а приложена она на расстоянии $L/3$ от конца B.

а)



б)

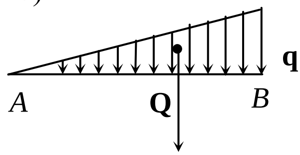


Рис. 3.3

4. Момент силы относительно точки и оси

4.1. Момент силы относительно точки. *Моментом силы* **F** *относительно точки O называется вектор* $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$, *равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы и самой силы* $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Проекции его равны $M_{Ox}(\mathbf{F}) = (yF_z - zF_y)$,

$M_{Oy}(\mathbf{F}) = (zF_x - xF_z)$, $M_{Oz}(\mathbf{F}) = (xF_y - yF_x)$, где x, y, z – координаты радиус-вектора точки A приложения силы (рис. 4.1). Направлен вектор $\mathbf{M}_O$ перпендикулярно плоскости векторов **r** и **F** в сторону, откуда вращение тела под действием данной силы представляется происходящим против хода часовой стрелки. Его модуль равен $|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\beta$, где β – угол

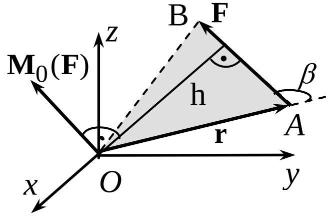


Рис. 4.1

между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Отрезок $r\sin\beta = h$ определяет расстояние от точки O до линии действия силы и называется *плечом силы*, $|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = Fh$.

Для плоской системы сил можно ввести понятие алгебраического момента силы $m_O(\mathbf{F}) \equiv \pm M_O(\mathbf{F}) = \pm F\,h$ (знак «плюс» берется, если под действием силы тело поворачивается против хода часовой стрелки, и «минус» – в противном случае).

4.2. Теорема Вариньона. *Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольной точки O равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

4.3. Момент силы относительно оси. *Моментом силы $\mathbf{F}$ относительно оси Oz называется скалярная величина, равная алгебраическому моменту проекции $\mathbf{F}_{xy}$ этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью:*

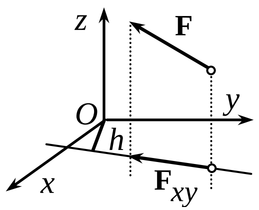


Рис. 4.2

$$M_z(\mathbf{F}) = \pm M_O(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h.$$

Знак «плюс» берется, если с положительной стороны оси Oz вращение, которое сила $\mathbf{F}_{xy}$ стремится совершить, видно происходящим против хода часовой стрелки, а знак «минус» – в противном случае, h – плечо силы $\mathbf{F}_{xy}$ относительно точки O (рис. 4.2).

Теорема. *Моменты сил относительно осей в системе координат Oxyz равны проекциям момента силы относительно начала координат O.*

$$M_x(\mathbf{F}) = M_{Ox}(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y,$$

$$M_y(\mathbf{F}) = M_{Oy}(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z,$$

$$M_z(\mathbf{F}) = M_{Oz}(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x.$$

Момент относительно оси равен нулю, когда сила параллельна оси ($F_{xy} = 0$), или линия действия силы пересекает ось ($h = 0$).

5. Пара сил

5.1. Пара сил, момент пары. Система двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, равных по величине и противоположных по направлению, линии действия которых не совпадают, называется *парой сил*. Пара сил *не имеет* равнодействующей. Расстояние между линиями действия сил пары называется пл*ечом пары* (отрезок d на рис. 5.1). *Моментом пары* называется вектор $\mathbf{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары $M=Fd$. Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда вращение пары видно происходящим против хода часовой стрелки. Момент пары можно еще определить как момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы

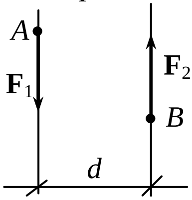


Рис. 5.1

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_2) = \mathbf{AB} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1) = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_1 .$$

Для пар сил, расположенных в одной плоскости, как и для обычных сил, часто используют понятие алгебраического момента пары $M = \pm Fd$. Знак плюс берется, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, минус – по ходу.

5.2. Теорема об эквивалентности пар. *Все пары сил, имеющие один и тот же момент, эквивалентны.*

Из этой теоремы следует, что пара сил полностью определяется ее моментом. *Располагать пару сил в пространстве можно в любом месте.*

5.3. Теорема о сложении пар. *Действие на тело системы пар с моментами* $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$,…, $\mathbf{M}_n$ *эквивалентно действию одной пары с моментом*

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i .$$

5.4. Жесткая заделка. Так называется связь, которая возникает, например, если один конец балки жестко зацементировать неподвижно в стенку так, как показано на рис. 5.2а. Этот тип связи не позволяет вообще как-либо двигаться закрепленному телу. Поэтому реакция связи – сила и пара сил. Для плоской системы сил полная реакция жесткой заделки складывается из силы $\mathbf{N}$ с составляющими $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y$ и момента жесткой заделки m_A относительно места заделки A (рис. 5.2в).

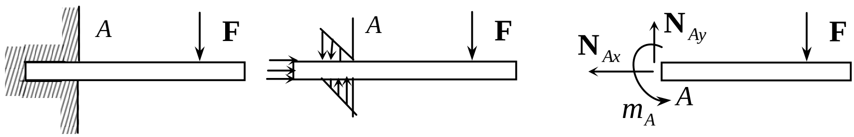


Рис. 5.2

6. Приведение произвольной системы сил к центру

6.1. Лемма о параллельном переносе силы. *Силу* $\mathbf{F}$, *приложенную в точке* A *твердого тела, можно перенести параллельно в точку* B*, добавив при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.*

6.2. Главный вектор и главный момент. *Главным вектором* системы сил $(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n)$ называется вектор, равный их сумме:

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \,.$$

Главным моментом этой системы сил относительно точки A называется вектор, равный сумме их моментов этой же точки:

$$\mathbf{M}_A^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Ai} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_i)\,.$$

Главные моменты относительно точек A и B связаны соотношением $\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_B^* + \mathbf{AB} \times \mathbf{R}^*$.

6.3. Основная теорема статики. *Произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно заменить ее главным вектором, приложенным в произвольно выбранной точке (центре приведения), и парой сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно этой точки.*

6.4. Частные случаи приведения. Согласно теореме 6.3 произвольная система сил может быть эквивалентно заменена одной силой (главным вектором) и парой (главным моментом). Здесь возможны следующие частные случаи.

1. Если $\mathbf{R}^* = 0,\ \mathbf{M}_O^* = 0$, то система сил уравновешена и тело находится в равновесии.

2. Если $\mathbf{R}^* \neq 0,\ \mathbf{M}_O^* = 0$, то система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точку O.

3. Если $\mathbf{R}^* = 0,\ \mathbf{M}_O^* \neq 0$, то система сил приводится к паре с моментом $\mathbf{M}_O^*$ и главные моменты сил относительно любых точек равны.

4. Если $\mathbf{R}^* \neq 0,\ \mathbf{M}_O^* \neq 0$, но $\mathbf{R}^* \perp \mathbf{M}_O^*$, то система сил также приводится к равнодействующей. Уравнение ее линии действия имеет вид

$$yR_z^* - zR_y^* = M_{Ox}^*,\ \ zR_x^* - xR_z^* = M_{Oy}^*,\ \ xR_y^* - yR_x^* = M_{Oz}^*.$$

Для плоской системы сил векторы $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O^*$ всегда перпендикулярны, поэтому *плоская система сил сводится либо к паре сил (если* $\mathbf{R}^* = 0$*), либо к равнодействующей (если* $\mathbf{R}^* \neq 0$*).*

5. Если $\mathbf{R}^* \neq 0,\ \mathbf{M}_O^* \neq 0$, но $\mathbf{R}^* \parallel \mathbf{M}_O^*$, то такая совокупность силы и пары сил называется *динамой*, а прямая, вдоль которой направлены векторы, – *осью динамы*. *Главный момент сил принимает наименьшее значение на оси динамы*.

6. В общем случае, когда $\mathbf{R}^* \neq 0,\ \mathbf{M}_O^* \neq 0$, но векторы $\mathbf{M}_O^*$ и $\mathbf{R}^*$ не перпендикулярны и не параллельны, система сил также приводится к силовой динаме. *Если произвольная система сил не уравновешена, то она сводится либо к паре сил, либо к равнодействующей, либо к динаме.*

6.5. Условия равновесия произвольной системы сил имеют вид

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0, \qquad \mathbf{M}_O^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = 0,$$

где O – некоторая произвольная точка, или в координатной форме

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_z(\mathbf{F}_k) = 0 .$$

Для системы параллельных сил (параллельных оси Oz) из шести уравнений остаются только три:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_k) = 0 .$$

А для системы сходящихся сил, как мы уже знаем (см. раздел 2),

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 .$$

6.6. Уравнения равновесия плоской системы сил имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} M_A(\mathbf{F}_k) = 0 .$$

Иногда удобно использовать две другие формы уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_A(\mathbf{F}_k) = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\mathbf{F}_k) = 0,$$

причем *линия AB не должна быть перпендикулярна оси Ox*, или

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\mathbf{F}_k) = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\mathbf{F}_k) = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_C(\mathbf{F}_k) = 0,$$

где точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

6.7. Равновесие составной конструкции. При рассмотрении равновесия конструкции можно, освободившись от связей, рассмотреть равновесие каждого из тел и составить для них уравнения равновесия. В эти уравнения наряду с активными силами войдут также и силы реакций внешних и внутренних связей. Если общее число независимых уравнений больше или равно общему числу неизвестных задачи, то такая конструкция будет статически определимой. Можно также, используя аксиому 5 (принцип отвердевания), рассматривать равновесие всей конструкции либо какойнибудь ее части. При составлении уравнений равновесия следует иметь в виду, что силы реакций внутренней связи, соединяющей два элемента конструкции, действующие на каждый из элементов, согласно аксиоме 4, равны по величине и противоположно направлены.

7. Равновесие при наличии трения

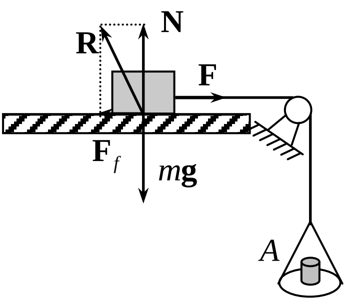


Рис. 7.1

Сила реакции шероховатой поверхности $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f$ складывается из силы нормальной реакции $\mathbf{N}$ и перпендикулярной к ней *силы трения* $\mathbf{F}_f$. Сила трения может действовать как на покоящееся, так и на движущееся тело. В связи с этим различают трение покоя и трение скольжения. Сила трения покоя $\mathbf{F}_f$ может принимать любые значения от нуля до некоторого максимального, называемого предельной силой трения покоя $\mathbf{F}_f^*$. Направлена $\mathbf{F}_f^*$ в сторону, противоположную той, куда действующие активные силы стремятся сдвинуть тело. Предельная сила трения $\mathbf{F}_f^*$ пропорциональна нормальной составляющей силы реакции $\mathbf{N}$ шероховатой поверхности $\mathbf{F}_f^* = f_s N$ (закон Кулона). *Коэффициент трения покоя* f_s (статический коэффициент трения) определяется лишь свойствами материалов соприкасающихся тел и не зависит от площади контакта этих тел.

Полная реакция $\mathbf{R}$ составляет с нормалью к поверхности угол φ, тангенс которого равен $\mathrm{tg}\varphi = F_f / N$. Для предельной силы трения $\mathrm{tg}\varphi^* = F_f^* / N = f_s$, предельный угол φ^* определяет статический коэффициент трения и называется *углом трения*.

При решении задач с учетом трения покоя важно определить вначале, какое равновесие рассматривается – *предельное* или *не-*

предельное. Если равновесие предельное, то из двух неизвестных величин N и F_f в силу связи $\mathbf{F}_f^* = f_s N$ остается только одна. Если же равновесие непредельное, то обе эти величины неизвестны, а неравенство $F_f \le f_s N$ является необходимым условием равновесия.

Сила трения скольжения также определяется законом Кулона, однако коэффициент трения скольжения обычно существенно меньше коэффициента трения покоя.

8. Рекомендации к решению задач статики

Решение задач статики состоит из следующих этапов.

1. Необходимо установить, равновесия какого тела (точки, системы тел) следует рассмотреть.
2. Освободить исследуемое тело от связей и изобразить действующие на него активные силы и силы реакций отброшенных связей.
3. Установить, какая система сил действует на тело, и сформулировать условия равновесия этой системы.
4. Составить уравнения равновесия.
5. Если тел несколько, то следует рассмотреть другие тела (повторив пункты 1–4), исходя из того, чтобы в конечном счете общее число уравнений и неизвестных совпало.
6. Решить уравнения равновесия и определить тем самым искомые величины.

9. Задание 1. Плоская система сходящихся сил

Система тел, представленная на рис. 9.1–9.4, находится в равновесии. Полагая $\alpha = \pi / 2a$ рад и $P = 5b$ кН, определить усилия в стержнях AB и CB (варианты 1–14), натяжение веревки CB и угол β (варианты 15–16), натяжение веревки CB (вариант 17), натяжение веревок AB и CB (варианты 18–21), реакции плоскостей (варианты 22–24), реакцию веревки AB и силу давления шара на стенку (варианты 25–30). Значения параметров a и b из табл. 9.1 задаются преподавателем.

Таблица 9.1

a	2	3	3	2	3	2	2	3	3
b	5	10	4	6	4	5	10	6	8

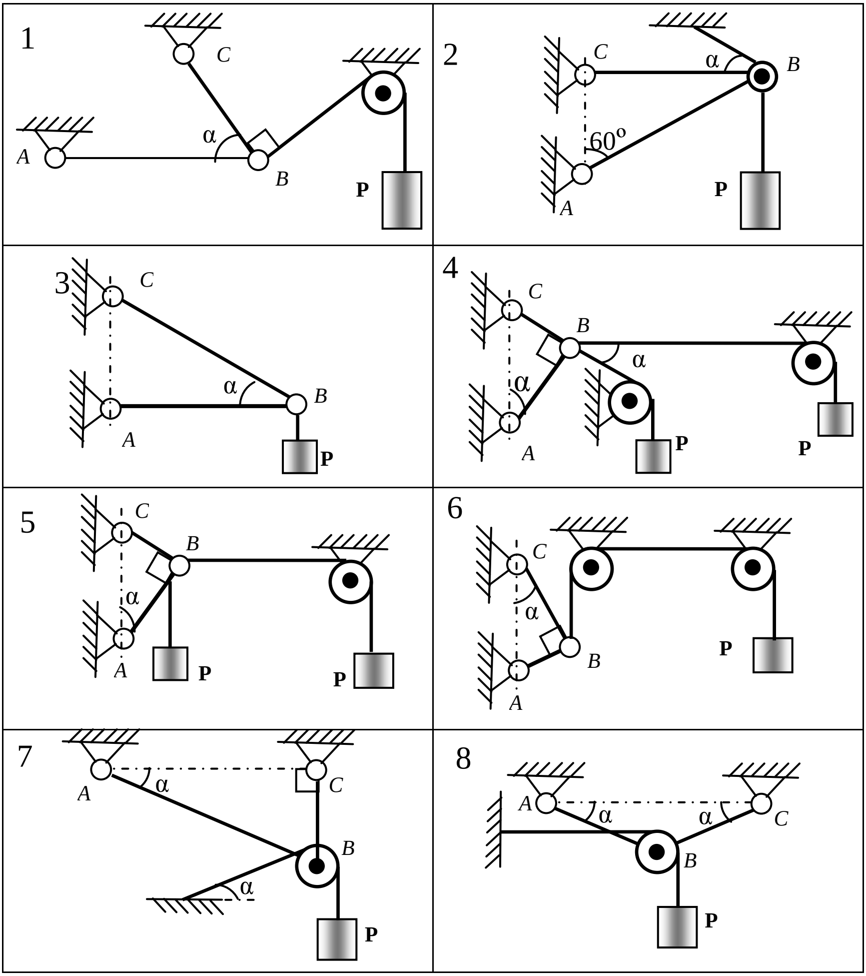


Рис. 9.1

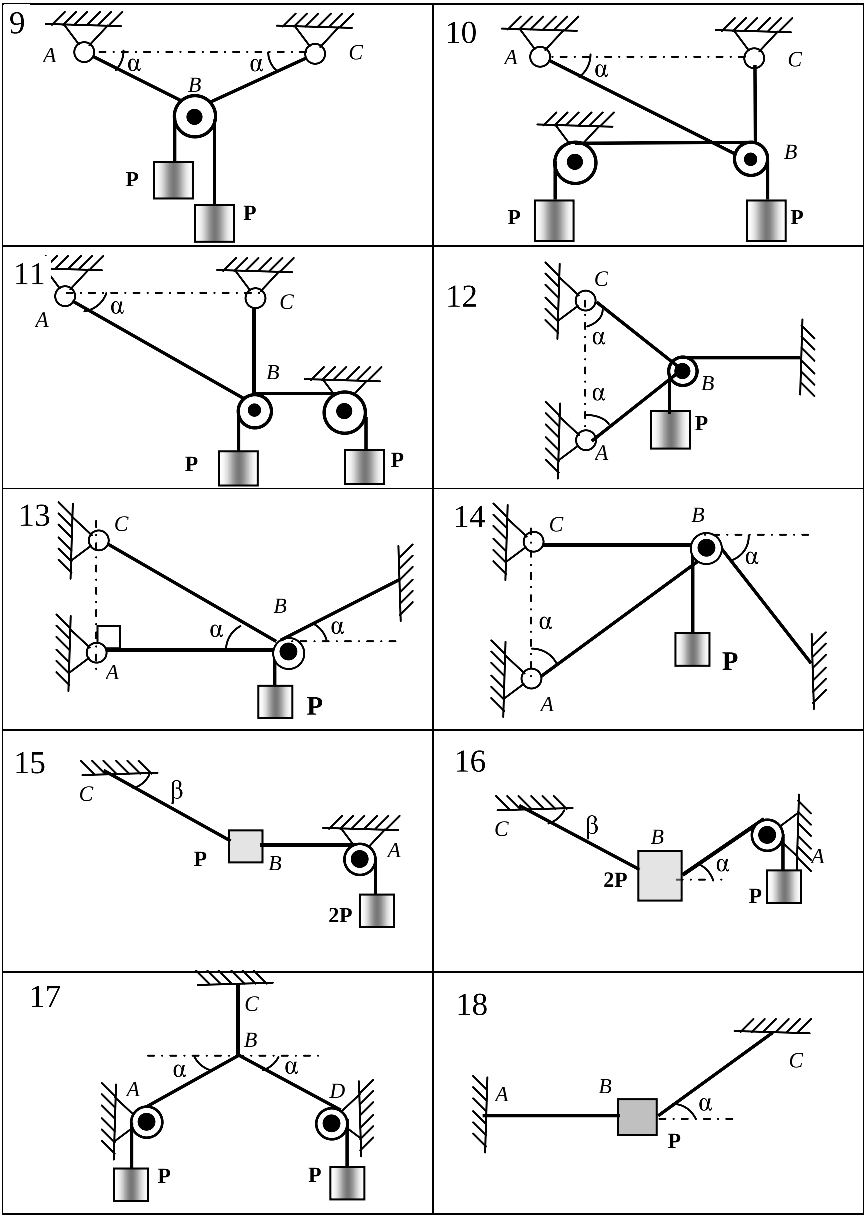

9
A
B
C
α
α
P
P
10
A
C
B
α
P
P
11
A
C
B
α
P
P
12
C
B
A
α
α
P
13
C
B
A
α
α
P
14
C
B
A
α
α
P
15
C
β
P
B
A
2P
16
C
β
B
2P
α
A
P
17
C
B
A
D
α
α
P
P
18
A
B
C
α
P

Рис. 9.2

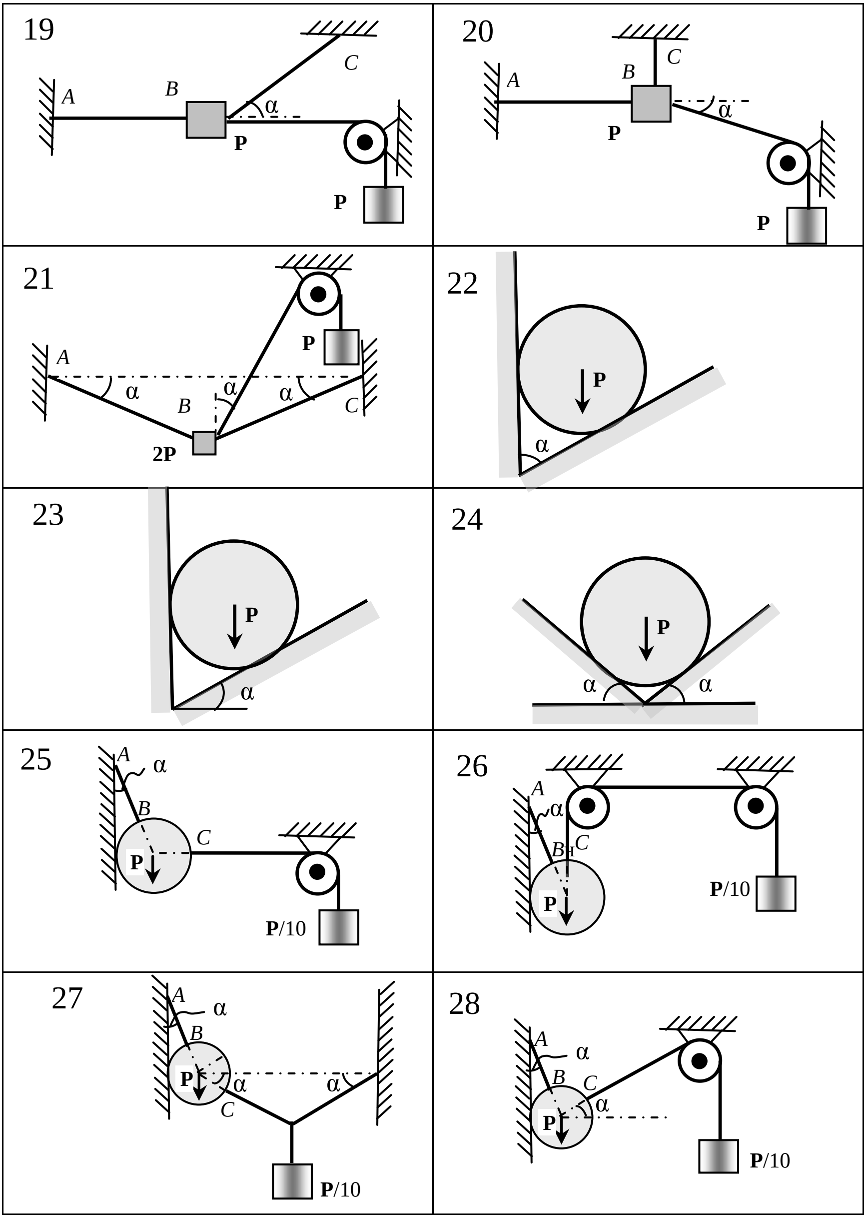

19
A
B
C
α
P
P
20
A
B
C
α
P
P
21
A
α
B
α
α
C
P
2P
22
P
α
23
P
α
24
P
α
α
25
A
α
B
C
P
P/10
26
A
α
B
C
P
P/10
27
A
α
B
P
α
α
C
P/10
28
A
α
B
C
α
P
P/10

Рис. 9.3

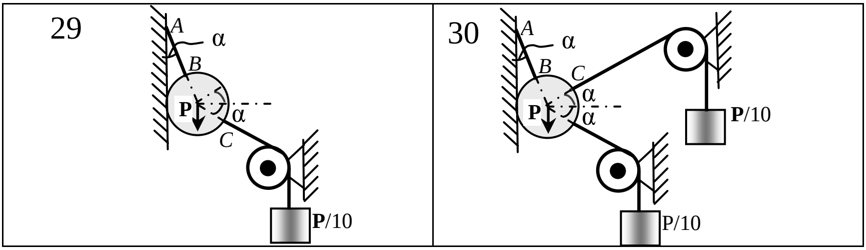


Рис. 9.4

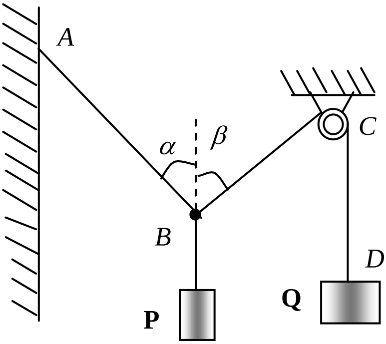


Рис. 9.5

Пример. К веревке AB, один конец которой закреплен в точке A, привязаны в точке B груз P и веревка BCD, перекинутая через блок, к концу D которой подвешена гиря весом $Q =$ 10 кН. Определить, пренебрегая трением в блоке, натяжение T веревки AB и вес груза P, если углы, образуемые веревками с вертикалью $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (рис. 9.5).

Решение. Рассмотрим равновесие узла B. Этот узел находится в равновесии под действием активной силы $\vec{\mathbf{P}}$ и реакций нитей $\mathbf{R}_{AB}$ и $\mathbf{R}_{BC}$, причем $R_{BC} = Q,\ \ R_{AB} = T$. Расчетная схема представлена на рис. 9.6.

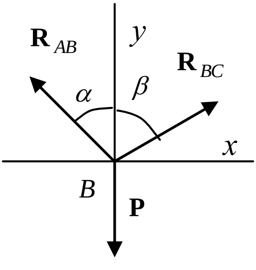


Рис. 9.6

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad -R_{AB}\sin\alpha + Q\sin\beta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad R_{AB}\cos\alpha + Q\cos\beta - P = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$R_{AB} = T = 12{,}2 \text{ кН}, \quad P = 13{,}7 \text{ кН}.$$

Эту задачу можно решить и графически, анализируя построенный силовой многоугольник, в данном случае треугольник. Этот силовой треугольник показан на рис. 9.7. По теореме синусов имеем

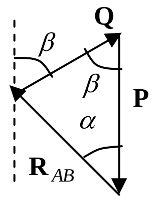


Рис. 9.7

$$\frac{R_{AB}}{\sin\beta}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{P}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно,

$$R_{AB}=T=Q(\sin\beta/\sin\alpha)=12{,}2\ \text{кН},$$
$$P=Q[\sin(\alpha+\beta)/\sin\alpha]=13{,}7\ \text{кН}.$$

10. Задание 2. Пространственная система сходящихся сил

Определить усилия в стержнях пространственной фермы. Она состоит из 6 невесомых стержней, соединенных шарнирами и закрепленных посредством неподвижных шарнирных опор (см. рис. 10.1–10.5). Силы P и Q приложены к узлам фермы и составляют с осями x, y, z соответственно углы $0^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ и 30°, 0°, 60°. Модули этих сил, а также углы θ и φ в прямоугольном параллелепипеде $ABCOKEDL$ задаются преподавателем в интервалах: $30^\circ \le \theta \le 60^\circ$, $30^\circ \le \varphi \le 60^\circ, \varphi > \theta$.

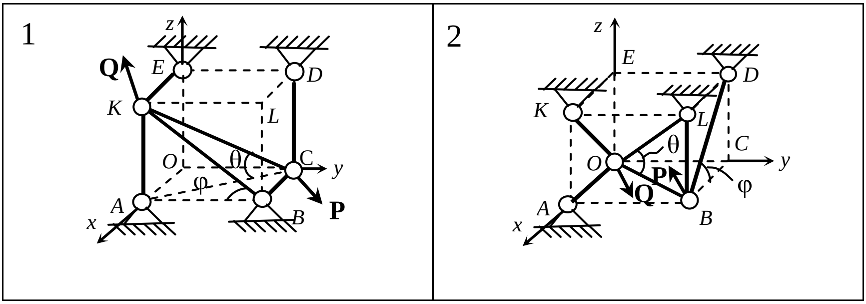


Рис. 10.1

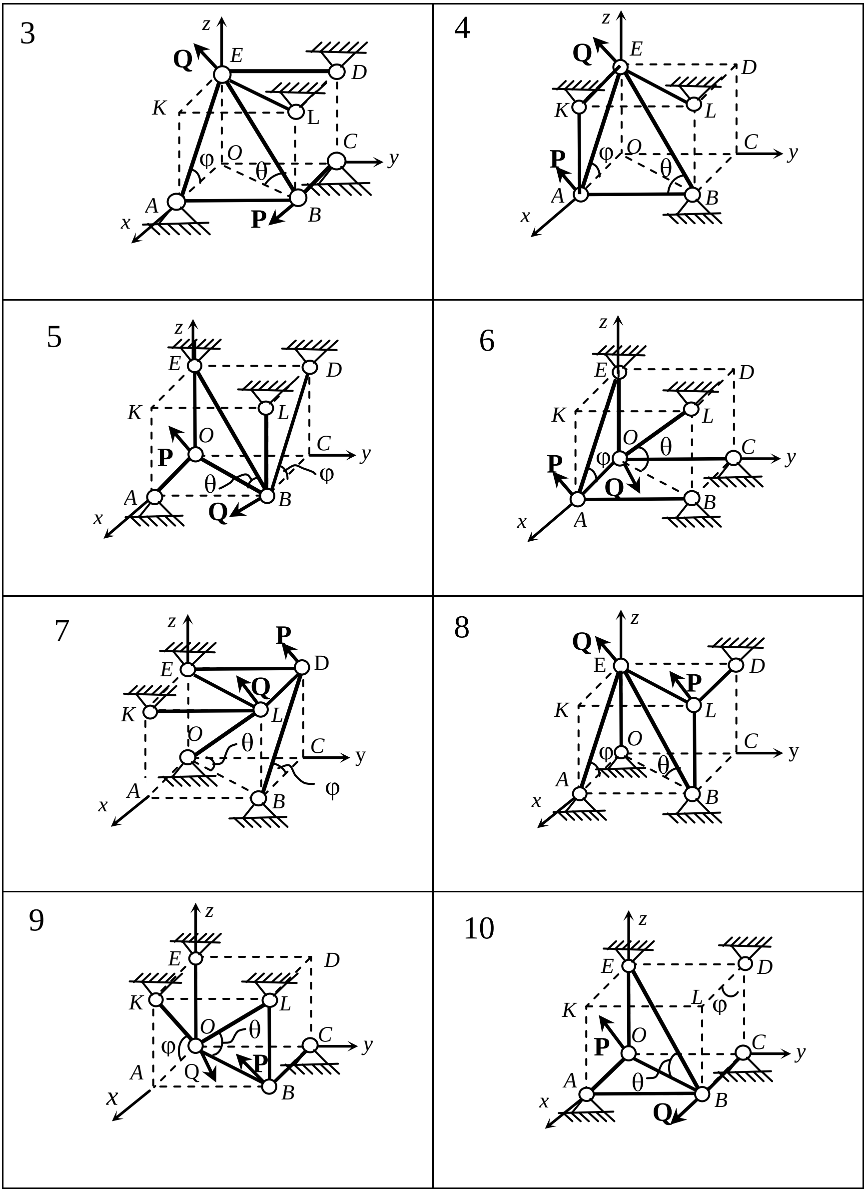

3
z
Q
E
D
K
L
O
C
y
φ
θ
A
B
P
x
4
z
Q
E
D
K
L
O
C
y
P
φ
θ
A
B
x
5
z
E
D
K
L
O
C
y
P
θ
φ
A
B
Q
x
6
z
E
D
K
L
O
θ
C
y
P
φ
Q
B
A
x
7
z
P
E
D
Q
K
L
O
θ
C
y
A
φ
B
x
8
Q
z
E
D
P
K
L
O
C
y
φ
θ
A
B
x
9
z
E
D
K
L
O
θ
C
y
φ
A
Q
P
B
x
10
z
E
D
L
K
φ
O
C
y
P
A
θ
B
Q
x

Рис. 10.2

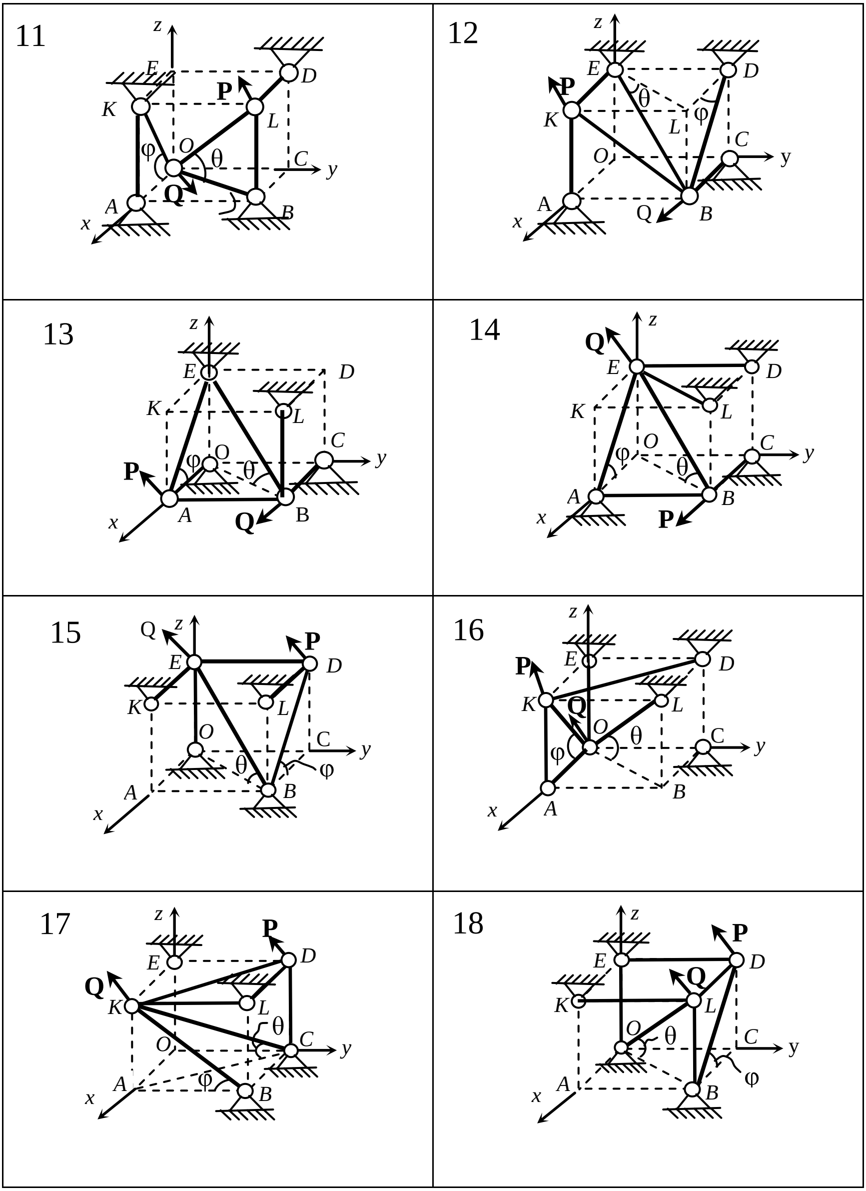

11
z E K P L D O φ θ C y Q A B x
12
z E D P K θ φ L O C y A Q B x
13
z E D K L C O φ θ y P A Q B x
14
z Q E D K L O C y φ θ A B P x
15
Q z E P D K L O C y θ φ A B x
16
z E D P K Q L O θ C y φ A B x
17
z P E D Q K L θ O C y A φ B x
18
z P E D Q K L O θ C y A B φ x

Рис. 10.3

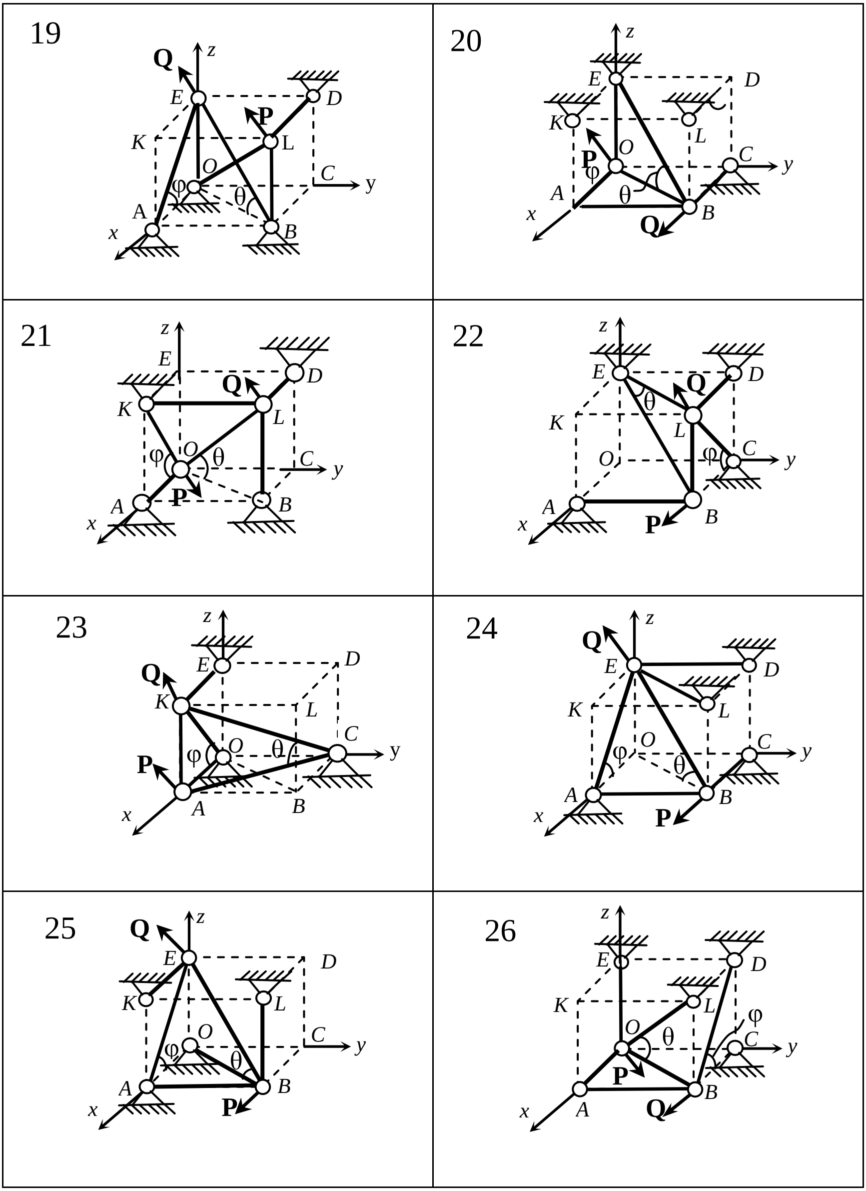


Рис. 10.4

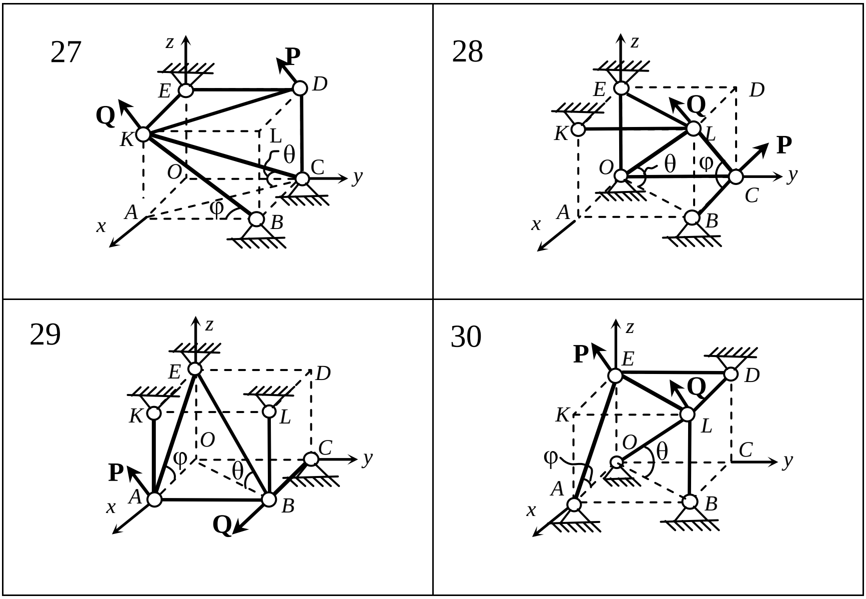


Рис. 10.5

Пример. Определить усилия в шести невесомых стержнях пространственной фермы. Стержни соединены в узлах и с опорами в вершинах прямоугольного параллелепипеда шарнирами, как показано на рис. 10.6. В прямоугольном параллелепипеде *ABCOKEDL* с ребром, параллельным оси z, равным $a = 3$ м, угол $\theta = 45^\circ$, угол $\varphi = 60^\circ$. Углы, составляемые силами $P = 5$ кН и $Q = 8$ кН с осями x, y, z соответственно указаны в скобках $P(45°, 60°, 60°)$, $Q(60°, 45°, 60°)$.

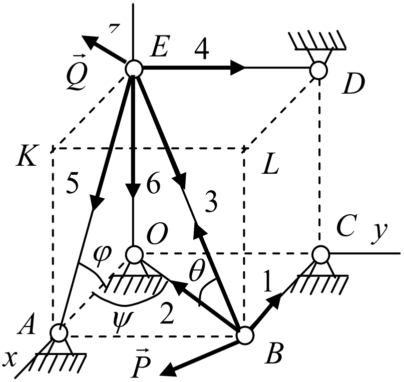


Рис. 10.6

Решение. Из треугольников OBE, AOE AOB находим $OB = a\operatorname{ctg}\theta$, $AO = a\operatorname{ctg}\varphi$, $\cos\psi = AO/OB = \operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi = 0{,}58$, $\sin\psi = 0{,}81$. Вырежем узел B и заменим отрезанные стержни их реакциями, предполагая их растянутыми. Уравнения равновесия узла B имеют вид

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = P\cos 0^\circ - S_1 - S_2\cos\psi - S_3\cos\theta\cos\psi = 0,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = P\cos 60^\circ - S_2\sin\psi - S_3\cos\theta\sin\psi = 0,$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = P\cos 30^\circ + S_3\sin\theta = 0\,.$$

Отсюда

$$S_3 = -P\cos 30^\circ/\sin\theta = -6{,}3 \text{ кН},$$

$$S_2 = (P\cos 60^\circ - S_3\cos\theta\sin\psi)/\sin\psi = 6{,}3 \text{ кН},$$

$$S_1 = P\cos 0^\circ - S_2\cos\psi - S_3\cos\theta\cos\psi = 1{,}6 \text{ кН}.$$

Таким образом, стержни 1, 2 растянуты, стержень 3 сжат.

Вырежем теперь узел E. Заменим отрезанные стержни их реакциями, снова предполагая их растянутыми. При этом модули реакций стержня 3 на узлы E и B равны: $S_3' = S_3$. Следовательно, уравнения равновесия узла E таковы:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = Q\cos 60^\circ + S_3'\cos\theta\cos\psi + S_5\cos\varphi = 0\,,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Q\cos 0^\circ + S_3'\cos\theta\sin\psi + S_4 = 0\,,$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = Q\cos 30^\circ - S_3'\sin\theta - S_5\sin\varphi - S_6 = 0\,.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$S_5 = (-Q\cos 30^\circ - S_3\cos\theta\cos\psi)/\cos\varphi = -2{,}2 \text{ кН},$$

$$S_4 = -Q\cos 0^\circ - S_3\cos\theta\sin\psi = -4{,}4 \text{ кН},$$

$$S_6 = Q\cos 60^{\circ} - S_3 \sin\theta - S_5 \sin\varphi = 6{,}5 \quad \text{кН.}$$

Следовательно, стержни 4 и 5 сжаты, стержень 6 растянут.

11. Задание 3. Равновесие тела под действием плоской системы сил

В данном задании необходимо определить реакции связей тел, представленных на рис. 11.1–11.2, которые находятся в равновесии под действием плоской системы сил. Значения сил даны в табл. 11.1 (силы в кН, моменты – в кН·м, интенсивность распределенной нагрузки – в кН/м, углы – в градусах, линейные размеры – в м). Если на чертеже данного варианта отсутствует какая-либо величина, присутствующая в таблице, то она опускается. В вариантах 12, 17, 24 вес груза **P** равен 300 кН.

Таблица 11.1

№	*AB*	*AC*	*AD*	α	**F**	*m*	q, q_{max}
1	6	4	2	20	100	30	10
2	8	5	3	25	200	40	20
3	10	7	4	30	300	50	30
4	9	6	3	40	250	20	25
5	7	5	2	50	400	60	40
6	5	4	2	60	500	70	30
7	4	3	1	45	600	80	20
8	6	3	3	30	150	60	20
9	12	8	4	40	250	90	30
10	7	4	3	50	350	40	25

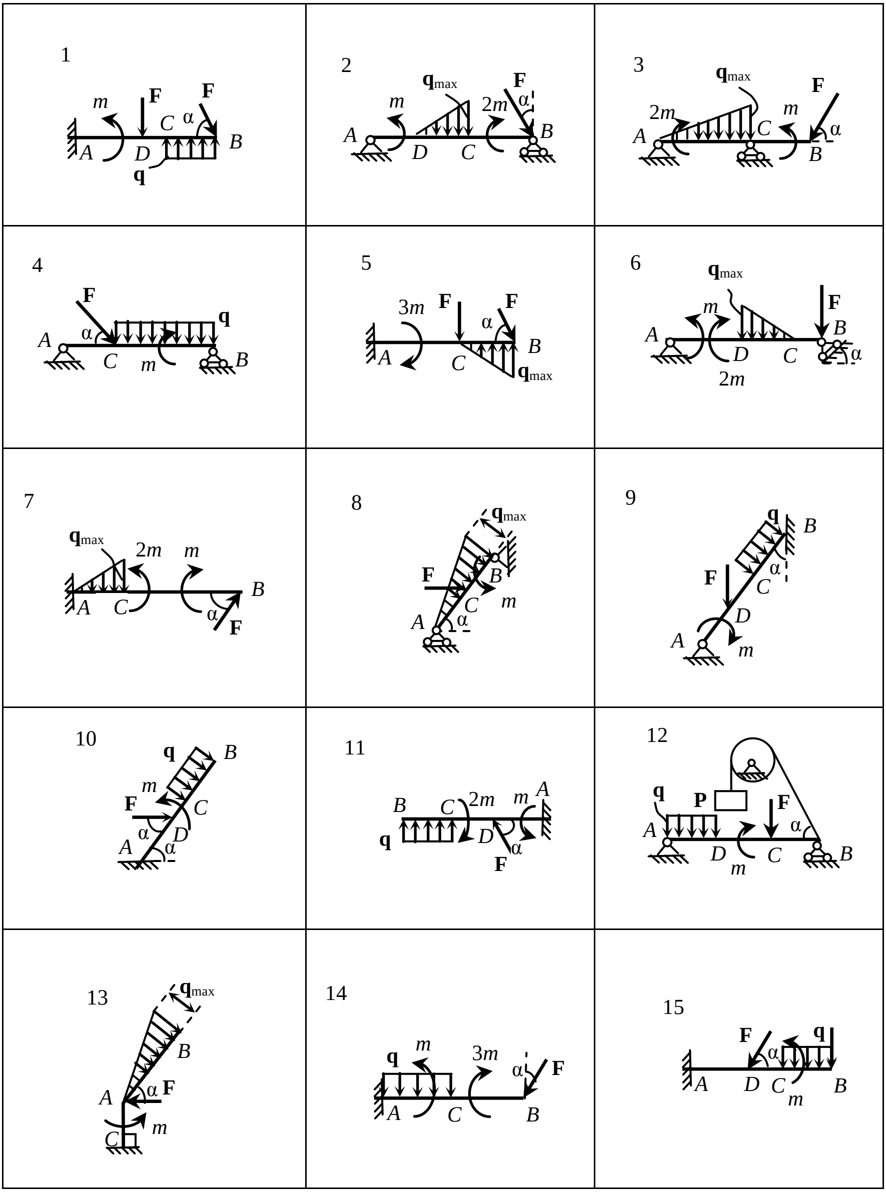

1 m F F C α A D B q
2 qmax F m 2m α A B D C
3 qmax F 2m m α A C B
4 F q A α C m B
5 3m F F α B A C qmax
6 qmax m F B A D C α 2m
7 qmax 2m m B A C α F
8 qmax F B m C A α
9 q B F α C D A m
10 q B m F C α D A α
11 2m m A B C q D α F
12 q P F α A D C B m
13 qmax B A α F m C
14 m 3m q α F A C B
15 F q α A D C B m

Рис. 11.1

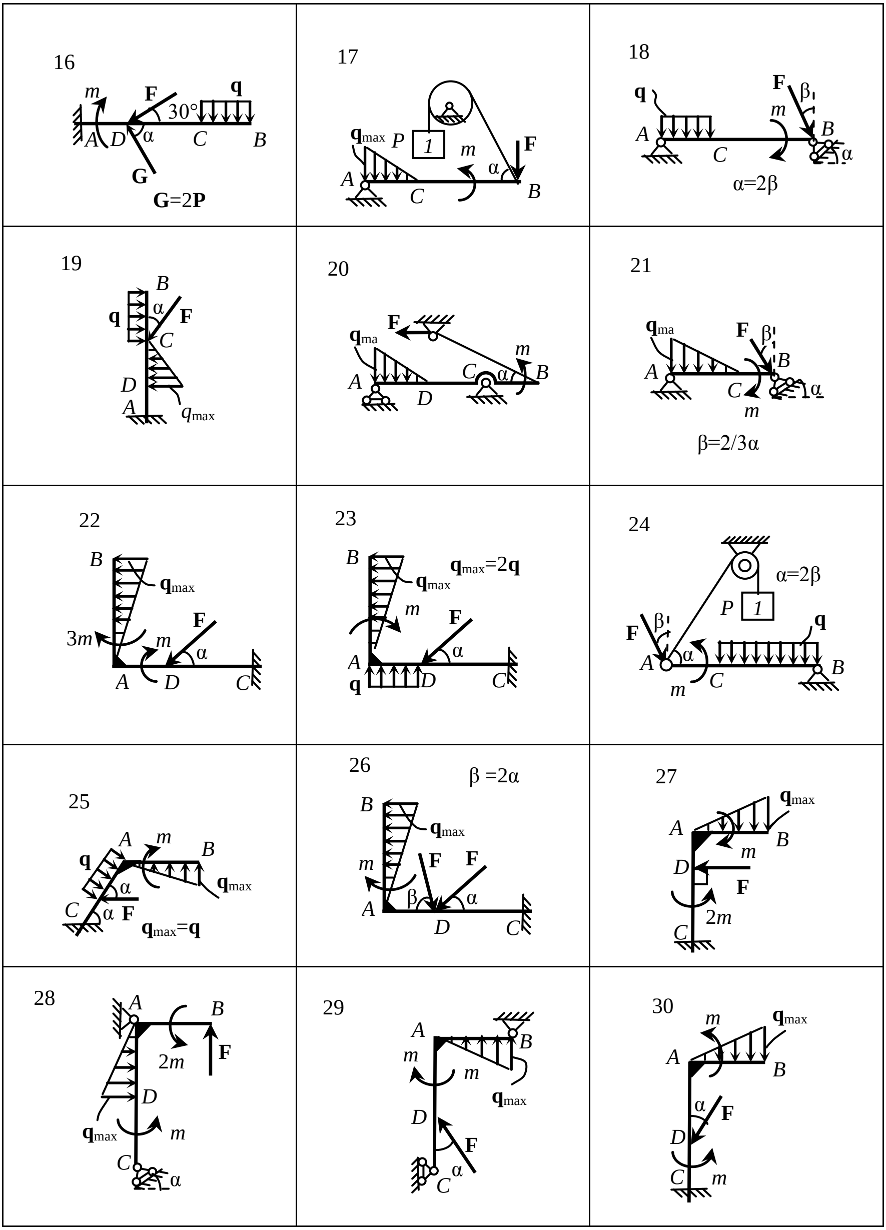

16
m
F
q
30°
A D α C B
G
G=2P
17
q max
P
1
m
α
F
A C B
18
F β
q
m
A
B
C
α
α=2β
19
B
q
α
F
C
D
A
q max
20
F
q ma
m
A
C
α
B
D
21
q ma
F β
A
B
C
α
m
β=2/3α
22
B
q max
F
3m
m
α
A D C
23
B
q max=2q
q max
m
F
α
A
q
D
C
24
α=2β
P
1
q
F
β
A
α
C
B
m
25
A
m
B
q
α
q max
C
α F
q max=q
26
β =2α
B
q max
m
F F
β α
A D C
27
q max
A
B
m
D
F
2m
C
28
A
B
2m
F
D
q max
m
C
α
29
A
B
m
m
q max
D
F
α
C
30
m
q max
A
B
α
F
D
C
m

Рис. 11.2

Пример. На изогнутую балку *AB* (рис. 11.3а), конец *A* которой заделан в стену, действуют распределенные нагрузки с интенсивностями $\boldsymbol{q}$ = 5 кН/м и $\boldsymbol{q}_{\max}$ = 10 кН/м, сосредоточенная сила и пара сил с моментом M = 20 кН·м. Определить реакции заделки, если F = 50 кН, AD = 5 м, BC = 3 м, DE = 4 м, α = 60°.

а) б)

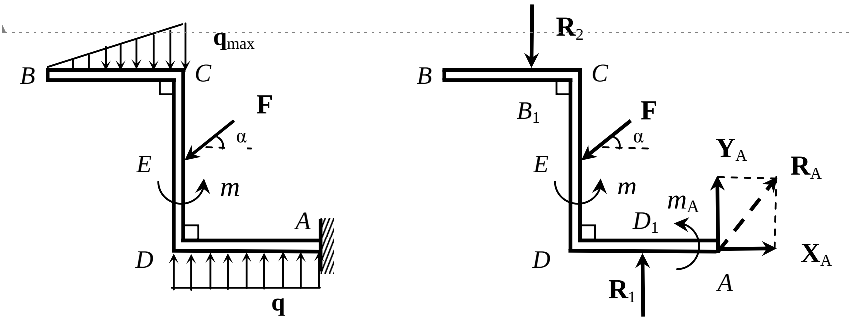


Рис. 11.3

Решение. Освободим балку от связей и заменим их реакциями. Одновременно распределенные нагрузки заменим их равнодействующими (см. рис. 11.3б), $R_2 = (q_{\max} BC)/2 = 15$ Н, приложенной в точке B_1, так что $B_1C = BC/3 = 1$ м, и $R_1 = q \cdot AD = 25$ Н, приложенной в точке D_1, AD_1 = 2,5 м.

Действие жесткой заделки сводится к силе, которую ищем в виде суммы двух ортогональных составляющих X_A и Y_A, и паре сил с моментом M_A. В результате система уравнений равновесия имеет вид

$$\Sigma F_{kx} = 0, \;\; X_A - F \cdot \cos\alpha = 0, \quad \Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_1 - F \cdot \sin\alpha - R_2 = 0,$$

$$\Sigma m_A(F_k) = 0 \;,$$

$$-R_1 AD_1 + F(ED\cos\alpha + AD\sin\alpha) + R_2(B_1C + AD) + M + M_A = 0.$$

Решая ее, находим: X_A = 25 Н, Y_A = 33,3 Н, $M_A = -364$ Н·м. Знак «минус» у момента M_A означает, что он направлен по ходу часовой стрелки.