



В.А. ЮДИН

**ЛЕКЦИИ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ**

НОВОСИБИРСК 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

В.А. Юдин

**ЛЕКЦИИ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ**

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК 2016

УДК 531.3
ББК В21
Ю 163

Юдин В. А.

Лекции по аналитической механике : учеб. пособие / В. А. Юдин ; Новосибир. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2016. – 72 с.

ISBN 978-5-7795-0778-3

Учебное пособие включает три лекции по аналитической механике, посвященных рассмотрению принципа Даламбера, принципа возможных перемещений и принципа Даламбера–Лагранжа.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» и специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» всех форм обучения.

Печатается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- С.М. Аульченко, д-р физ.-мат. наук,
вед. науч. сотрудник (ИТПМ СО РАН);
- В.В. Леманов, канд. техн. наук, доцент
НГАСУ (Сибстрин)

ISBN 978-5-7795-0778-3 © Юдин В.А., 2016
© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ВВЕДЕНИЕ	6
ЛЕКЦИЯ 1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА	
1.1. Принцип Даламбера для точки.....	8
1.2. Принцип Даламбера для механической системы	10
1.3. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции	11
1.4. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела	14
1.5. Рекомендации по решению задач с помощью принципа Даламбера	17
Вопросы для самоконтроля	21
Упражнения.....	22
ЛЕКЦИЯ 2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	
2.1. Уравнение связей, классификация связей.....	23
2.2. Возможные (виртуальные) перемещения.....	25
2.3. Число степеней свободы, обобщенные координаты	27
2.4. Идеальные связи	29
2.5. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)	31
2.6. Применение принципа к простейшим машинам	33
2.7. Применение принципа к определению реакций связей	36
2.8. Рекомендации по решению задач на применение принципа	38
2.9. Выражение принципа через обобщенные координаты	45
Вопросы для самоконтроля	47
Упражнения.....	48

ЛЕКЦИЯ 3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

3.1. Принцип Даламбера – Лагранжа (общее уравнение динамики).....	50
3.2. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)	55
3.3. Рекомендации по решению задач на применение уравнений Лагранжа второго рода	58
3.4. Уравнения Лагранжа второго рода в случае консервативных систем.....	64
Вопросы для самоконтроля	70
Упражнения.....	71

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа посвящена систематическому изложению аналитической механики – части курса теоретической механики, обычно читаемой в технических вузах, и включает рассмотрение принципа Даламбера, принципа возможных перемещений (Лагранжа) и принципа Даламбера – Лагранжа.

Данное пособие – это не учебник, а курс лекций. Автор намеренно написал его максимально приближенным к аудитории в надежде вызвать отклик и живую реакцию. Пособие создано на основе лекций, которые автор в течение многих лет читал в Новосибирском государственном архитектурно-строительном университете (Сибстрин).

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры теоретической механики, которые принимали активное участие в работе над данным курсом лекций.

ВВЕДЕНИЕ

До сих пор при изучении равновесия или движения механической системы мы пользовались принципом освобожденности от связей. Действие связей учитывалось нами при этом введением сил реакций этих связей. Такой подход в теоретической механике получил название *классического* или *ньютонического*.

Силы реакции связей являются, как правило, неизвестными величинами и доставляют основные трудности при определении закона движения механических систем. Вообще ценность того или иного подхода к изучению движения или равновесия механических систем определяется числом неизвестных сил реакций связей, которые удается при этом исключить. Например, в рамках классического подхода при рассмотрении теорем о движении центра масс, об изменении количества движения и об изменении момента количества движения нам удалось исключить все внутренние силы и, в частности, все внутренние реакции связей. При рассмотрении теоремы об изменении кинетической энергии исключаются реакции связей (внутренние и внешние), работа которых равна нулю.

Теперь же мы познакомимся еще с одним подходом. Суть его состоит в том, что действие связей учитывается не путем введения сил реакций связей, а путем рассмотрения лишь тех перемещений точек механической системы, которые допускаются этими связями. То есть мы будем рассматривать лишь возможные, допускаемые связями, перемещения. Такой подход позволяет получить уравнения равновесия или движения системы, не содержащие наперед неизвестных реакций связей, и называется *аналитическим*, а раздел механики, изучающий такой подход, называется *аналитической механикой*.

В рамках классического подхода, освободившись от всех связей, мы делали систему свободной. После этого все ее точки могли, в принципе, двигаться в любом направлении. Действительное же движение ее точек среди всех возможных, т.е. которое на самом деле происходит – это то, которое удовлетворяет

второму закону Ньютона. В рамках аналитического подхода точки системы уже не свободны, и второй закон Ньютона для них применять нельзя. Поэтому основная задача в аналитической механике состоит в нахождении принципов выбора действительного движения среди всех, дозволяемых связями. Решение этого вопроса существенно зависит от вида связей, наложенных на изучаемую систему. В нашем курсе лекций мы ограничимся рассмотрением лишь наиболее простых связей – стационарных удерживающих голономных (см. п. 2.1 лекции 2) – и для них познакомимся с принципами выбора действительного движения. В случае равновесия механической системы это будет принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений, см. лекцию 2). Для того чтобы обобщить принцип Лагранжа на случай движущихся систем, мы рассмотрим сначала принцип Даламбера (см. лекцию 1), который сводит задачу динамики к задаче статики, а затем уже применим принцип Лагранжа. Такой подход получил название принципа Даламбера – Лагранжа (см. лекцию 3).

Лекция 1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1.1. Принцип Даламбера для точки

Пусть \mathbf{F} – равнодействующая всех активных сил и сил реакций связей, действующих на материальную точку. Ее динамика описывается уравнением Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Этому уравнению можно придать форму уравнения статики, переписав его в виде $\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = 0$ и обозначив $\mathbf{F}^{in} = -m\mathbf{a}$. Вектор \mathbf{F}^{in} имеет размерность силы, и его называют *силой инерции*. Следовательно,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^{in} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) выражает *принцип Даламбера для точки*: если к действующим на точку активным силам и силам реакции связей добавить силу инерции, то получится уравновешенная система сил. В проекциях на оси x, y, z принцип Даламбера запишется в виде

$$F_x + F_x^{in} = 0, \quad F_y + F_y^{in} = 0, \quad F_z + F_z^{in} = 0. \quad (1.2)$$

Отметим, что реально на точку действуют лишь активные силы и силы реакции связей, равнодействующая которых равна \mathbf{F} . Сила инерции \mathbf{F}^{in} на точку не действует и введена формально. Принцип Даламбера, таким образом, является формальным приемом, с помощью которого задачу о движении точки можно сводить к задаче ее равновесия. Только при этом к активным силам и силам реакций связей нужно еще добавить силу инерции. Такой прием бывает удобен при нахождении реакций связей, действующих на точку при известных активных силах и заданном законе ее движения.

Задача 1.1. Шарнирно-стержневая система (рис. 1.1) вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Стержни MA и MB считать невесомыми и имеющими равную длину l . Определить усилия в стержнях, если угол между ними равен 2α , а в точке M сосредоточен груз массы m .

Решение. Ускорение точки M равно $\omega^2 l \cos \alpha$ и направлено горизонтально к оси вращения. Следовательно, сила инер-

ции $F^{in} = m\omega^2 l \cos \alpha$ и направлена горизонтально от оси вращения (узнаешь, читатель, это ведь хорошо знакомая по школьному курсу физики центробежная сила). Обозначая через S_1 и S_2 усилия в стержнях, напомним уравнения (1.2) для точки M в проекциях на оси x и y

$$-S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \alpha + m\omega^2 l \cos \alpha = 0, \quad S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha - mg = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$S_1 = m\omega^2 l / 2 + mg / 2 \sin \alpha, \quad S_2 = m\omega^2 l / 2 - mg / 2 \sin \alpha. \quad (1.3)$$

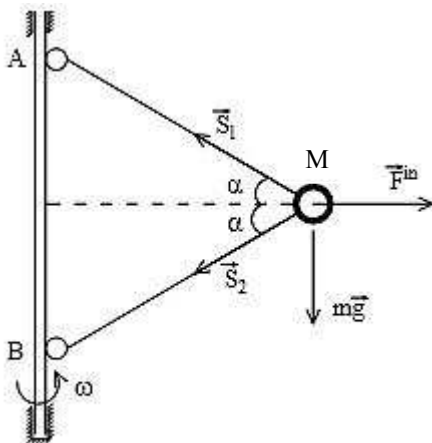


Рис. 1.1

Заметим, что реакции стержней для вращающейся ($\omega \neq 0$) и покоящейся ($\omega = 0$) конструкции отличаются, причем не только количественно, но и качественно (!). Действительно, для покоящейся конструкции стержень AM растянут, а стержень BM сжат. Для вращающейся же конструкции, при достаточно больших ω , оба стержня, как это следует из (1.3), будут растянуты.

1.2. Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим теперь систему, состоящую из N материальных точек $M_k, k=1, \dots, N$. Записывая для каждой из них принцип Даламбера, получим

$$\mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^{in} = 0, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{F}_k^e, \mathbf{F}_k^i$ – соответственно равнодействующие всех внешних сил и всех внутренних сил (т.е. активных и реакций связей), действующих на k -ю точку, а $\mathbf{F}_k^{in} = -m_k \mathbf{a}_k$ – ее сила инерции.

Складывая соотношения (1.4) и учитывая, что сумма всех внутренних сил системы равна нулю, получим

$$\mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{in} = 0, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{F}^e = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e$, $\mathbf{F}^{in} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{in}$ – соответственно главные векторы всех внешних сил и сил инерции.

Умножим теперь слева векторно каждое из уравнений (1.4) на радиус-вектор \mathbf{r}_k k -й точки и просуммируем полученные уравнения. Тогда, с учетом того, что сумма моментов всех внутренних сил системы равна нулю, получим уравнение

$$\mathbf{M}_0^e + \mathbf{M}_0^{in} = 0, \quad (1.6)$$

в котором $\mathbf{M}_0^e, \mathbf{M}_0^{in}$ – главные моменты соответственно внешних сил и сил инерции относительно начала O системы координат $Oxuz$. В проекциях на оси координат уравнения (1.5) и (1.6) дают

$$\begin{aligned} F_x^e + F_x^{in} = 0, \quad F_y^e + F_y^{in} = 0, \quad F_z^e + F_z^{in} = 0, \\ M_x^e + M_x^{in} = 0, \quad M_y^e + M_y^{in} = 0, \quad M_z^e + M_z^{in} = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Векторные уравнения (1.5), (1.6) и соответствующие им шесть скалярных уравнений (1.7) являются математической формулировкой *принципа Даламбера для механической систе-*

мы: если к действующим на систему внешним силам добавить силы инерции, то получится уравновешенная система сил.

Принцип Даламбера позволяет решать задачу динамики механической системы с помощью уравнений статики (1.7). При вычислении главных векторов и главных моментов относительно центра O активных сил и сил реакций связей следует учитывать только внешние силы (согласно свойству внутренних сил).

Если механическая система состоит из одного твердого тела, то уравнения (1.7) полностью определяют его движение (при задании начальных условий), так же как и его равновесие полностью определяется соответствующими шестью уравнениями статики (три уравнения проекций сил и три уравнения моментов сил относительно осей). Если механическая система состоит из нескольких твердых тел, то принцип Даламбера можно применить к каждому из этих тел в отдельности.

1.3. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции

Применение принципа Даламбера требует умения вычислять главный вектор и главный момент сил инерции рассматриваемой механической системы. Формулы для их вычисления мы получим, заметив, что принцип Даламбера является просто другой формой записи теорем об изменении количества движения и об изменении момента количества движения. Действительно, вспоминая теорему об изменении количества движения и учитывая (1.5), получим формулу для вычисления главного вектора сил инерции

$$\mathbf{F}^{in} = -M\mathbf{a}_c. \quad (1.8)$$

Главный вектор сил инерции равен произведению массы системы на ускорение ее центра масс, взятому со знаком «минус». Можно также сказать, что главный вектор сил инерции равен силе инерции ее центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы.

Вспоминая теперь теорему моментов и учитывая (1.6), получим

$$\mathbf{M}_0^{in} = -\frac{d\mathbf{K}_0}{dt}, \quad M_z^{in} = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (1.9)$$

Главный момент сил инерции равен производной по времени от момента количества движения системы, взятой со знаком «минус».

Приведение сил инерции для твердого тела. Для твердого тела, как мы знаем из курса статики, любая система сил приводится к главному вектору и к главному моменту этих сил относительно центра приведения. Тем самым и силы инерции приводятся к главному вектору \mathbf{F}^{in} и к главному моменту \mathbf{M}_0^{in} относительно центра приведения O согласно формулам (1.8) и (1.9). Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Поступательное движение.* В этом случае ускорения всех точек тела $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}$, силы инерции $\mathbf{F}_k^{in} = -m_k \mathbf{a}_k = -m_k \mathbf{a}$ образуют систему параллельных сил, направленных в одну сторону (аналогично силам тяжести $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{g}$), и поэтому имеют равнодействующую, приложенную (как и для сил тяжести) в центре масс C тела. *Для поступательного движения твердого тела силы инерции сводятся к равнодействующей $\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{M}\mathbf{a}$, проходящей через его центр масс.*

2. *Вращательное движение.* Пусть еще тело симметрично относительно плоскости Oxy , перпендикулярной оси вращения Oz (рис. 1.2, на котором изображено сечение тела плоскостью Oxy). Если привести силы инерции к центру O , то, в силу симметрии, результирующий вектор и пара сил будут лежать в плоскости симметрии Oxy . При этом, согласно (1.8), главный вектор $\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{M}\mathbf{a}_c$, а главный момент, согласно (1.9) и с учетом формулы $K_z = J_z \omega$, направлен вдоль оси вращения z и равен $M_{oz}^{in} = -J_z \varepsilon$.

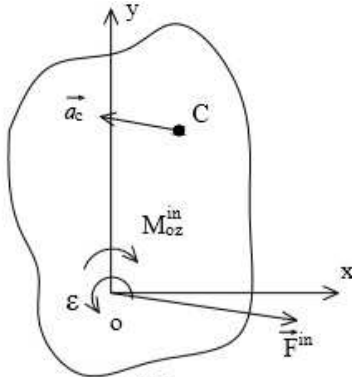


Рис. 1.2

Если в рассмотренном нами случае центр масс тела лежит на его оси вращения, то главный вектор сил инерции $\mathbf{F}^{in} = 0$ и силы инерции приводятся к паре сил с моментом $M_{oz}^{in} = -J_z \varepsilon$, направленным вдоль оси вращения.

3. *Плоское движение тела.* Также пусть еще тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости (рис. 1.3). Система сил инерции в этом случае сведется к лежащей в этой плоскости силе, равной $\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{M}\mathbf{a}_c$, и паре сил с моментом $M_c^{in} = -J_c \varepsilon$.

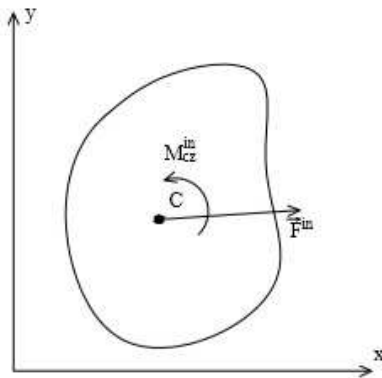


Рис. 1.3

В более сложных случаях движения твердого тела главный вектор и главный момент сил инерции относительно центра приведения находят аналитическим путем через проекции на три координатные оси.

1.4. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела

Как мы уже говорили, принципом Даламбера удобно пользоваться при определении реакций связей при известных активных силах и заданном законе движения. В качестве примера (рис. 1.4) определим реакции подпятника $\mathbf{R}_A = (X_A, Y_A, Z_A)$ и подшипника $\mathbf{R}_B = (X_B, Y_B, 0)$ твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω и с угловым ускорением ε вокруг оси z , на которое действует система сил $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$, имеющая главный вектор $\mathbf{F} = \sum_k^n \mathbf{F}_k$ и главный момент $\mathbf{M}_A = \sum_k^n \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_k)$ относительно начала A системы координат $Axyz$. Пусть еще расстояние между подпятником и подшипником $AB = h$.

Чтобы воспользоваться уравнениями (1.7), предварительно вычислим главный вектор и главный момент относительно точки A сил инерции. В нашем случае

$$\mathbf{F}^{in} = -M\mathbf{a}_c = -M(\mathbf{a}_c^{gp} + \mathbf{a}_c^{uc}) = (Mx_c\omega^2 + My_c\varepsilon, My_c\omega^2 - Mx_c\varepsilon, 0),$$

$$\mathbf{M}_A^{in} = (M_x^{in}, M_y^{in}, M_z^{in}) = -\left(\frac{dK_x}{dt}, \frac{dK_y}{dt}, \frac{dK_z}{dt}\right).$$

Вспоминая теперь выражения для проекций момента количества движения $K_x = J_{xz}\omega$, $K_y = J_{yz}\omega$, $K_z = J_z\omega$, получим

$$\frac{dK_x}{dt} = J_{xz}\varepsilon + \frac{dJ_{xz}}{dt}\omega, \quad \frac{dK_y}{dt} = J_{yz}\varepsilon + \frac{dJ_{yz}}{dt}\omega, \quad \frac{dK_z}{dt} = J_z\varepsilon + \frac{dJ_z}{dt}\omega.$$

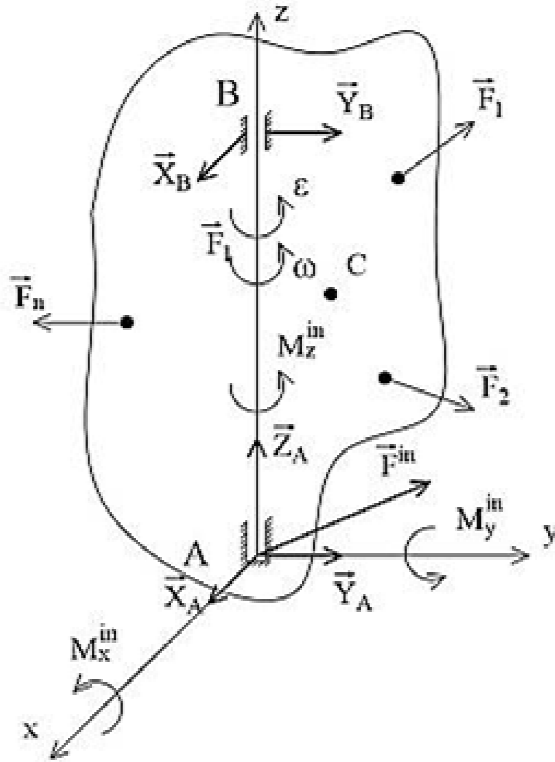


Рис. 1.4

Вычислим теперь производные от моментов инерции. Так как $J_{xz} = \sum_k x_k z_k$, то $\frac{dJ_{xz}}{dt} = \sum_k \dot{x}_k z_k = -\sum_k \omega y_k z_k = -\omega \sum_k y_k z_k = -J_{yz} \omega$ (мы учли, что $\dot{x}_k = v_{xk} = -y_k \omega$ и что z_k со временем не меняется). Аналогично $\frac{dJ_{xz}}{dt} = J_{xz} \omega$ (здесь нужно учесть, что $\dot{y}_k = v_{yk} = x_k \omega$). И наконец, так как J_z со временем не меняется, то $\frac{dJ_z}{dt} = 0$. Следовательно, $M_x^{in} = -J_{yz} \omega^2 - J_{xz} \varepsilon$,

$M_y^{in} = J_{xz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon$, $M_z^{in} = J_z \varepsilon$. С учетом проведенных вычислений уравнения (1.7) будут иметь вид

$$\begin{aligned} F_x + X_A + X_B + Mx_c \omega^2 + My_c \varepsilon &= 0, \\ F_y + Y_A + Y_B + My_c \omega^2 - Mx_c \varepsilon &= 0, \quad F_z + Z_A = 0, \\ M_x^F - Y_B h - J_{yz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon &= 0, \quad M_y^F + X_B h + J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon = 0, \\ M_z^F - J_z \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Последнее уравнение не содержит реакций опор и представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения тела. Составляющие X_A, Y_A, X_B, Y_B реакций опор зависят, как видно из остальных уравнений (1.10), как от внешних задаваемых сил, так и от сил инерции. Следовательно, каждая из этих реакций имеет статическую составляющую $X_A^{st}, Y_A^{st}, X_B^{st}, Y_B^{st}$, вызванную действием внешних сил (т.е. ту, которая была бы в статике, когда $\omega = \varepsilon = 0$), и динамическую добавку $X_A^d, Y_A^d, X_B^d, Y_B^d$, связанную с движением тела и вызванную силами инерции.

Уравнения для определения этих динамических добавок получим, подставив выражения $X_A = X_A^{st} + X_A^d$, $Y_A = Y_A^{st} + Y_A^d$, $X_B = X_B^{st} + X_B^d$, $Y_B = Y_B^{st} + Y_B^d$ в уравнения (1.10). Учитывая, что статические составляющие реакций опор удовлетворяют этим уравнениям при $\omega = \varepsilon = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} X_A^d + X_B^d + Mx_c \omega^2 + My_c \varepsilon &= 0, \quad Y_A^d + Y_B^d + My_c \omega^2 - Mx_c \varepsilon = 0, \\ Y_B^d h - J_{yz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon &= 0, \quad X_B^d h + J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) показывают, что динамические добавки к реакциям опор при вращении твердого тела полностью определяются силами инерции и могут принимать большие значения при быстром вращении тела. Эти уравнения также позволяют определить условия, при которых динамические добавки к реакциям подпятника и подшипника равны нулю. Действительно, решение $X_A^d = Y_A^d = X_B^d = Y_B^d = 0$ системы уравнений (1.11) соответствует случаю

$$\begin{aligned}
 Mx_c \omega^2 + My_c \varepsilon = 0, \quad My_c \omega^2 - Mx_c \varepsilon = 0, \quad -J_{yz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon = 0, \\
 J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Решая уравнения (1.12) относительно неизвестных x_c, y_c, J_{xz}, J_{yz} , получаем, что $x_c = y_c = 0$ и $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Это означает, что ось вращения должна быть главной центральной осью инерции тела.

Таким образом, мы установили, что *динамические добавки к реакциям подпятника и подшипника равны нулю в том случае, если ось вращения тела является главной центральной осью инерции*. Для выполнения этого условия вращающимся частям машин обычно придают форму тел вращения. Если из-за неточности изготовления или в процессе эксплуатации ось вращения тела не окажется главной центральной осью инерции, то эта погрешность устраняется специальными методами центровки (например, прибавлением к телу дополнительных точечных масс, как это делается с колесами автомобилей: к дискам колес крепятся дополнительные массы).

1.5. Рекомендации по решению задач с помощью принципа Даламбера

При решении задач с использованием принципа Даламбера целесообразно придерживаться следующей последовательности:

1. Как и при решении задач с помощью общих теорем динамики, прежде всего следует *выбрать механическую систему*. Если в задаче требуется определить внешние реакции опор конструкции, то в качестве механической системы лучше выбрать всю конструкцию. Для определения внутренних реакций связей нужно в качестве механической системы рассмотреть часть конструкции, для которой требуется реакция уже будет внешней.

2. Далее нужно *привести силы инерции, действующие на выбранную механическую систему, к простейшему виду*, т.е. найти главный вектор и главный момент относительно выбранного центра (или равнодействующую, если она существует). Формулы для их нахождения мы привели в п. 1.3.

3. Затем следует решать задачу точно так же, как мы это делали в статике, считая условно выбранную механическую систему (конструкцию или ее часть) неподвижной. То есть нужно *изобразить все действующие на нее внешние активные силы, внешние реакции связей и приведенные силы инерции*, составить для них систему уравнений (1.7), решить ее и найти неизвестные задачи.

Иногда принцип Даламбера используют при решении задач совместно с общими теоремами динамики или вторым законом Ньютона. Скажем, при рассмотрении всей конструкции применяют принцип Даламбера, а при рассмотрении какой-нибудь ее части – общие теоремы динамики, или наоборот.

Задача 1.2. Груз весом G поднимается с постоянным ускорением a с помощью лебедки весом Q , установленной на однородной горизонтальной балке длиной l и весом P , жестко заделанной в стену (рис. 1.5). Подъем вызывается вращающим моментом M , приложенным к лебедке, расстояние от оси лебедки до стены равно d . Определить реакцию заделки, предполагая, что барабан лебедки является однородным диском.

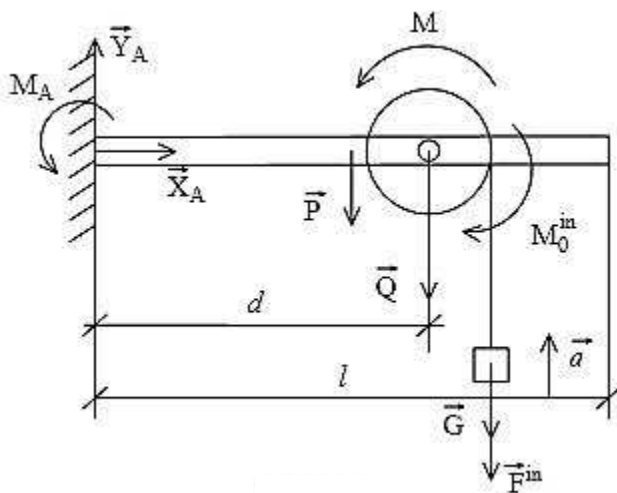


Рис. 1.5

Решение

1. Возьмем в качестве механической системы всю конструкцию (груз вместе с нитью, лебедку и балку).

2. Силы инерции будут состоять из силы инерции груза $\mathbf{F}^{in} = -G/g \cdot \mathbf{a}$ и момента инерции барабана $M_0^{in} = -J_0 \varepsilon = -0.5(Q/g)r^2 \varepsilon$.

3. Систему сил, действующую на конструкцию, включая силы инерции, покажем на рис. 1.5.

Система уравнений «равновесия» (мы ведь условно считаем конструкцию покоящейся) под действием указанной плоской системы сил будет иметь вид

$$X_A = 0, \quad Y_A - P - Q - G - F^{in} = 0,$$

$$M_A + M - M^{in} - Pl/2 - Qd - G(d+r) - F^{in}(d+r) = 0. \quad (1.13)$$

Заметим, что последнее из уравнений (1.13) мы можем существенно упростить, если применим принцип Даламбера к части конструкции, состоящей из барабана с грузом (вместе с нитью), и запишем уравнение моментов относительно оси барабана:

$$M - M^{in} - Gr - F^{in}r = 0. \quad (1.14)$$

Учитывая теперь соотношение (1.14) и выражения для сил инерции, получим из (1.13) ответ: $X_A = 0$, $Y_A = P + Q + G(1 + a/g)$, $M_A = Pl/2 + (Q + G(1 + a/g))a$.

Отметим, что полученные реакции заделки балки отличаются от статических реакций (которые были бы при покоящемся грузе, соответствующем условию $a = 0$). Как мы теперь знаем, это отличие обусловлено силами инерции. Мы обращаем внимание на это отличие еще и потому, что иногда в ответственных инженерных проектах встречаются ошибки, связанные с тем, что к движущимся частям конструкции применяются методы статики без учета сил инерции, что может привести (и приво-

дит!) к серьезным последствиям. В рассмотренной нами задаче ошибочный расчет реакций заделки балки с последующим изготовлением конструкции по этому расчету может привести, при больших ускорениях груза (например, при выключении электроэнергии), к вырыванию балки из стены.

Задача 1.3. Однородный тонкий стержень AB длиной l и весом P жестко скреплен с вертикальным валом OO_1 под углом α (рис. 1.6). Вал вместе со стержнем равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω . Определить реакции в заделке A стержня.

Решение

1. В качестве механической системы рассмотрим стержень AB .

2. Силы инерции стержня AB изображены на рис. 1.6 и приводятся к равнодействующей $F^{in} = ma_c = P\omega^2 l \sin \alpha / 2g$, приложенной в точке D , расположенной на две трети длины стержня $AD = 2l/3$.

3. Система сил, действующая на стержень, также изображена на рис. 1.6. Уравнения равновесия этой пространственной системы сил имеют вид

$$X_A = 0, \quad Y_A + F^{in} = 0, \quad Z_A - P = 0,$$

$$M_{Ax} - Pl \sin \alpha / 2 - F^{in} \cdot 2l \cos \alpha / 3 = 0, \quad M_{Ay} = 0, \quad M_{Az} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения значение F^{in} и решая их относительно неизвестных реакций, получим

$$X_A = 0, \quad Y_A = -P\omega^2 l \sin \alpha / 2g, \quad Z_A = P,$$

$$M_{Ax} = Pl(\sin \alpha + l\omega^2 \sin 2\alpha / 3g) / 2, \quad M_{Ay} = M_{Az} = 0.$$

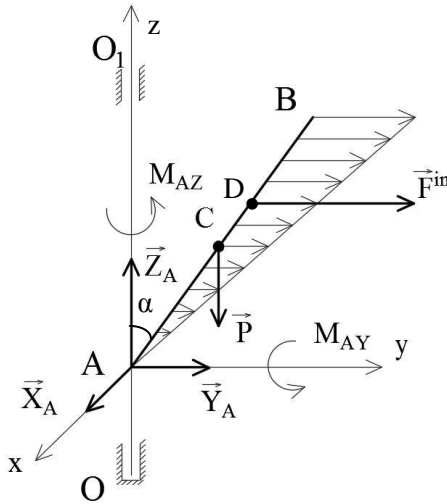


Рис. 1.6

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит принцип Даламбера для точки?
2. Как проявляет себя введенная формально сила инерции? Действует ли она реально на точку? Изменяет ли она реакции связей, действующих на точку?
3. В чем состоит принцип Даламбера для механической системы?
4. Является ли принцип Даламбера следствием общих теорем динамики?
5. Для решения каких задач удобно применять принцип Даламбера?
6. Как определяются главный вектор и главный момент сил инерции?
7. К чему приводятся силы инерции для поступательного движения твердого тела?
8. К чему приводятся силы инерции при вращении твердого тела вокруг оси, если оно симметрично относительно плоскости, перпендикулярной этой оси?

9. Как вычисляется главный вектор и главный момент сил инерции при плоском движении твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии?
10. Изменяются ли реакции опор твердого тела, закрепленного на оси, если оно начнет вращаться вокруг этой оси?
11. При каких условиях динамические добавки к реакциям опор вращающегося тела равны нулю?
12. Каковы основные этапы решения задач с помощью принципа Даламбера?

Упражнения

У1.1. Сплошной однородный диск массы m и радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. Его центр масс движется по закону $x_c(t) = at^2/2$, $a = \text{const}$, $a > 0$. Ось x направлена вдоль рельса. Определить главный вектор и главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс диска перпендикулярно плоскости движения.

У1.2. С каким ускорением должна двигаться по горизонтальной плоскости призма, боковая грань которой образует угол α с горизонтом, чтобы груз, лежащий на этой грани, не перемещался относительно призмы? Трением пренебречь.

У1.3. Однородный стержень массы m и длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить растягивающую силу в поперечном сечении стержня, отстоящем от его оси на расстоянии a .

Лекция 2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.1. Уравнение связей, классификация связей

Типичными примерами несвободного движения являются движения точек по заданным поверхностям или по заданным линиям. Такие связи могут быть заданы аналитически, в виде *уравнений связи*. Например, точка, находящаяся на конце нерастяжимого стержня длины l , другой конец которого закреплен шарнирно в точке O (рис. 2.1), будет двигаться по сфере радиуса l . В системе координат $Oxyz$ (см. рис. 2.1) уравнение этой сферы будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (2.1)$$

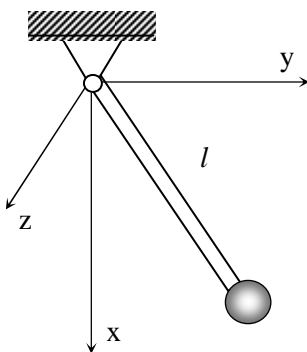


Рис. 2.1

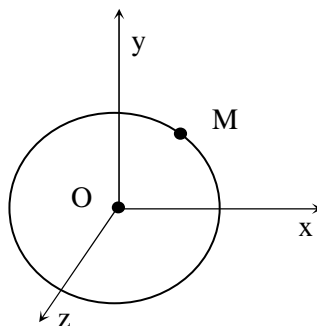


Рис. 2.2

Движение же кольца M , насаженного на проволоку, изогнутую в виде окружности радиуса R (рис. 2.2), будет происходить вдоль этой окружности. Задание ее в системе координат $Oxyz$ (см. рис. 2.2) определится системой двух уравнений:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad z = 0. \quad (2.2)$$

В этих примерах уравнения (2.1), (2.2) и являются уравнениями связей.

Рассмотрим теперь вопрос о связях подробнее и дадим их классификацию. Под *связями* в динамике будем понимать *любого вида ограничения, которые налагаются на положение и скорость движущихся тел (точек)*. Связь при этом может видоизменяться со временем, т.е. в общем случае уравнения связей имеют вид

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (2.3)$$

Если связь не меняется со временем (т.е. в уравнении (2.3) функция f от времени t явно не зависит), то ее называют *стационарной*, а если меняется, то *нестационарной*. В рассмотренном нами примере движения точки (2.1) связь является стационарной. Если же стержень заменить пружиной, то ее длина уже будет зависеть от времени $l = l(t)$, и уравнение (2.1) в этом случае будет описывать нестационарную связь: $x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0$.

Если связь не накладывает ограничений на скорости точек, то ее называют *голономной (геометрической)*, а если накладывает, то *неголономной (негеометрической)*. Голономная связь тогда будет описываться уравнением (2.3), в котором функция f не зависит от $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. В рассмотренных примерах несвободного движения точки связи, описываемые уравнениями (2.1), (2.2), являются голономными. Пример неголономной связи – движение конькобежца, точнее, скольжение конька по льду. Конек может занимать любое положение на поверхности льда, но при этом скорость конька в каждый момент времени должна быть направлена вдоль конька.

Наконец, различают связи *двусторонние (удерживающие)* и *односторонние (неудерживающие)*. Под двусторонними понимают связи, которые задаются *уравнениями*, а под односторонними – связи, которые задаются *неравенствами*. Для двусторонней связи точка должна во все время движения находиться строго на ее поверхности $f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ и не может ее покинуть ни с какой из двух ее сторон (поверхность удерживает точку). Для односторонней связи $f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \geq 0$

(или ≤ 0) точка может находиться как на поверхности, так и покинуть ее с одной стороны (поверхность не удерживает точку от покидания). Например, если в рассматриваемом нами первом примере стержень заменить нерастяжимой нитью, то такая связь уже будет задаваться неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0, \quad (2.4)$$

указывающим на то, что точка может быть как на поверхности сферы радиуса l , так и внутри нее. Связь в этом примере позволяет точке переместиться внутрь поверхности.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением двусторонних голономных стационарных связей. Такие связи задаются уравнениями вида

$$f(x, y, z) = 0. \quad (2.5)$$

2.2. Возможные (виртуальные) перемещения

Возможными перемещениями механической системы называются бесконечно малые ее перемещения, допускаемые в данный момент времени наложенными связями. В соответствии с этим определением, чтобы построить возможное перемещение системы, необходимо мысленно остановить время t , затем уже проанализировать, какие перемещения допускаются наложенными на нее связями.

Пример. Связь (шарнир), наложенная на кривошип OA механизма, показанного на рис. 2.3, позволяет ему лишь вращаться относительно точки O . При этом возможное перемещение δs_A точки A направлено перпендикулярно кривошипу. Направляющие ползуна позволяют точке B шатуна AB двигаться лишь вдоль прямой OB . Поэтому возможное перемещение δs_B точки B также направлено вдоль прямой OB . Возможным перемещением самого шатуна AB является, следовательно, бесконечно малый поворот $\delta \psi$ относительно его мгновенного центра скоростей C .

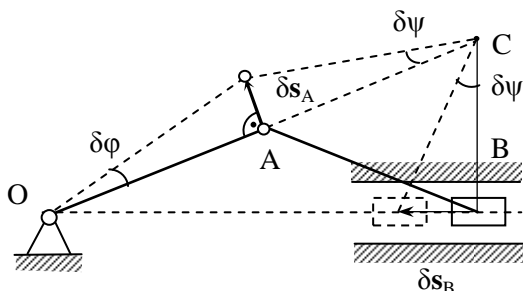


Рис. 2.3

Заметим, что, согласно определению возможных перемещений, мы рассматриваем бесконечно малые перемещения. Это позволяет криволинейные перемещения точек заменять прямолинейными, направленными по касательным к ним. В рассматриваемом примере на этом основании перемещение точки A по дуге окружности (радиуса OA с центром в точке O) мы заменили перемещением δs_A по касательной к ней (см. рис. 2.3).

Возможные перемещения точек системы δs_k не следует путать с действительными перемещениями ds_k . Действительные перемещения точек системы ds_k происходят под действием сил и совершаются с изменением времени от t до $t + dt$. При рассмотрении же возможных перемещений время t мы останавливаем и не обращаем внимания на силы, действующие на систему.

Для рассматриваемых нами стационарных голономных удерживающих связей действительные перемещения точек системы являются одними из возможных. Это следует из того, что такая связь задается уравнением поверхности вида $f(x, y, z) = 0$ (см. п. 2.1), на которой в любой момент времени должна находиться точка $M(x, y, z)$. Тогда ее возможными перемещениями будут все бесконечно малые перемещения δs , лежащие в касательной плоскости к этой поверхности (рис. 2.4).

Но так как для стационарной связи траектория точки $M(x, y, z)$ целиком лежит на этой поверхности, то действительное перемещение ds , направленное по касательной к траектории, также лежит в касательной плоскости, являясь тем самым одним из возможных.

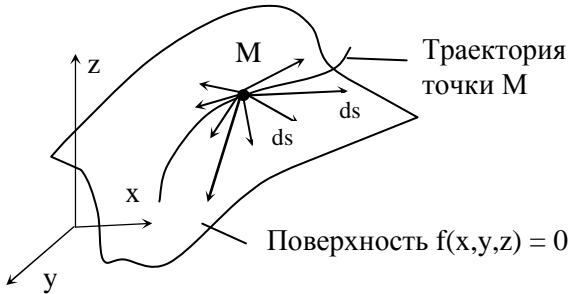


Рис. 2.4

2.3. Число степеней свободы, обобщенные координаты

При изучении кинематики число степеней свободы мы определяли как *число независимых параметров, полностью описывающих положение системы в пространстве*. Эти параметры и называются *обобщенными координатами*. Введем для них обозначения q_1, q_2, \dots, q_s , где s – число степеней свободы. Например, материальная точка в пространстве имеет три степени свободы, $s = 3$. В качестве независимых параметров q_1, q_2, q_3 , определяющих ее положение, т.е. в качестве ее обобщенных координат можно взять ее координаты x, y, z в прямоугольной декартовой системе, $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$. У твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси – одна степень свободы, $s = 1$, и одна обобщенная координата, например, угол поворота $q_1 = \varphi$. Твердое тело, совершающее плоское движение, имеет три степени свободы, $s = 3$. В качестве обобщенных координат

в кинематике мы брали координаты какой-нибудь его точки A (полюса), $q_1 = x_A, q_2 = y_A$, и угол поворота $q_3 = \varphi$ вокруг полюса A . У твердого тела, при его произвольном движении в пространстве – шесть степеней свободы, $s = 6$. В качестве обобщенных координат также можно взять координаты какой-нибудь его точки A (полюса), $q_1 = x_A, q_2 = y_A, q_3 = z_A$, и три угла Эйлера, характеризующих поворот вокруг этой точки A (полюса), $q_4 = \varphi, q_5 = \psi, q_6 = \theta$. У кривошипно-шатунного механизма, представленного на рис. 2.3 – одна степень свободы, при этом за независимый параметр можно взять, например, угол поворота кривошипа $q_1 = \varphi$. На рис. 2.5 изображен двойной плоский маятник, имеющий две степени свободы $q_1 = \varphi, q_2 = \psi$. Углы φ и ψ между собой независимы (можно менять угол φ , сохраняя неизменным угол ψ , или наоборот) и, очевидно, полностью определяют положение стержней OA и AB двойного маятника.

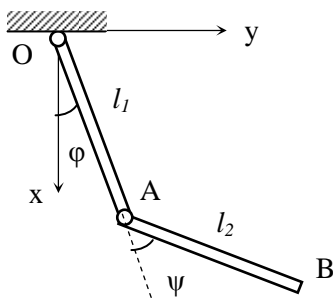


Рис. 2.5

Обобщенные координаты при движении механической системы будут с течением времени меняться и определять ее движение:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_s = q_s(t). \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) называют *кинематическими уравнениями движения системы в обобщенных координатах*. При этом координаты всех точек $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k=1, \dots, N$, механической системы выражаются через ее обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \dots, q_s, t), \quad y_k = y_k(q_1, \dots, q_s, t), \\ z_k &= z_k(q_1, \dots, q_s, t), \quad k=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что для стационарных связей всегда можно выбрать такие обобщенные координаты, для которых в выражения (2.7) время t явно входить не будет. В силу (2.7) возможные перемещения $\delta \mathbf{s}_k$ точек системы будут выражаться через возможные перемещения ее обобщенных координат

$$\delta \mathbf{s}_k = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$ – радиус-вектор k -й точки системы. Для рассматриваемых нами механических систем с голономными связями дополнительных ограничений на свободу их движения не возникает (голономные связи накладывают ограничения лишь на положение системы), поэтому возможные перемещения обобщенных координат $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ также будут независимы между собой*.

2.4. Идеальные связи

Рассмотрим механическую систему из N материальных точек M_k , $k=1, \dots, N$, подчиненную связям. Равнодействующую всех реакций связей, приложенных к точке M_k , обозначим через \mathbf{R}_k (рис. 2.6). Сообщим системе возможное перемещение и обозначим через $\delta \mathbf{s}_k$, $k=1, \dots, N$, возможные перемещения ее точек.

* Для неголономных систем число независимых возможных перемещений меньше числа независимых параметров, определяющих положение механической системы точек.

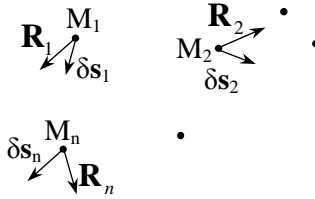


Рис. 2.6

Вычислим сумму работ реакций связей на этих перемещениях: $\delta A = \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{s}_k$.

Связи называются идеальными, если сумма работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\delta A = \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{s}_k = 0. \quad (2.9)$$

Приведем примеры идеальных связей.

1. *Гладкая удерживающая поверхность.* Реакция связи \mathbf{N} гладкой поверхности направлена по нормали к ней, а любое возможное перемещение $\delta \mathbf{s}$ точек удерживающей поверхности лежит в касательной плоскости к этой поверхности. Следовательно, $\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{s} = N \delta s \cos 90^\circ = 0$.

2. *Цилиндрический шарнир без трения.* Реакция такого шарнира \mathbf{R} перпендикулярна его оси, а возможное перемещение $\delta \mathbf{s}$ направлено вдоль оси, следовательно, $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{s} = R \delta s \cos 90^\circ = 0$.

3. *Качение тела по шероховатой поверхности* (без учета трения качения). Реакция шероховатой поверхности имеет две составляющие \mathbf{N} и \mathbf{F}_f , но обе они приложены к точке касания тела с поверхностью, которая является мгновенным центром скоростей, и, следовательно, для нее $\delta \mathbf{s} = \mathbf{0}$, а значит, и $\delta A = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{F}_f \cdot \delta \mathbf{s} = 0$.

4. *Движение двух точек A и B, связанных нерастяжимым невесомым стержнем.* В этом случае (рис. 2.7) силы реакций

связей в точках A и B связаны соотношением $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$, а возможные перемещения удовлетворяют равенству $\delta s_A \cos \alpha = \delta s_B \cos \beta$ (следует из равенства проекций скоростей двух точек на прямую, их соединяющую). Следовательно, равенство (2.9) также выполняется:

$$\delta A = \mathbf{F}_{AB} \cdot \delta \mathbf{s}_A + \mathbf{F}_{BA} \cdot \delta \mathbf{s}_B = F_{AB} \delta s_A \cos \alpha + F_{BA} \delta s_B \cos \beta = 0.$$

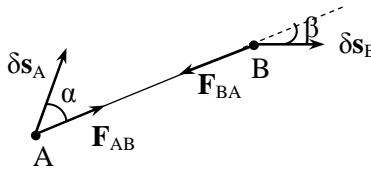


Рис. 2.7

Из рассмотренных примеров ясно, почему гладкую поверхность еще называют идеальной поверхностью, шарнир без трения – идеальным шарниром, а невесомый нерастяжимый стержень – идеальным стержнем.

При скольжении тела по шероховатой поверхности работа ее силы реакции на возможном перемещении не равна нулю, $\delta A = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{F}_f \cdot \delta \mathbf{s} = \mathbf{F}_f \cdot \delta \mathbf{s} \neq 0$, так как и \mathbf{F}_f и $\delta \mathbf{s}$ лежат в касательной к поверхности плоскости и угол между ними в общем случае произвольного возможного перемещения не равен 90° . То есть шероховатая поверхность при рассмотрении скользящих по ней тел – неидеальная связь. Тем не менее, шероховатую поверхность условно мы можем считать идеальной связью, если силу трения переведем в разряд активных сил. И таким приемом мы будем пользоваться в дальнейшем.

2.5. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Здесь речь пойдет о равновесии механической системы. Пусть еще все связи, наложенные на эту систему, являются дву-

сторонними стационарными голономными и идеальными. Тогда справедливо следующее утверждение, которое и называется *принципом возможных перемещений*: для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил на любом возможном перемещении равнялась нулю

$$\delta A^{akt} = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \delta \mathbf{s}_k = 0. \quad (2.10)$$

Впервые в общем виде этот принцип сформулировал и доказал Ж. Лагранж (1788), поэтому его еще называют принципом Лагранжа.

Доказательство принципа

1. *Необходимость*. Пусть механическая система находится в равновесии. Тогда, поскольку и каждая точка находится в равновесии, должно выполняться равенство $\mathbf{F}_k^{akt} + \mathbf{R}_k = 0$, где \mathbf{F}_k^{akt} и \mathbf{R}_k – соответственно равнодействующие всех активных сил и всех реакций связей, действующих на k -ю точку механической системы. Но тогда для любого возможного перемещения $\delta \mathbf{s}_k$ k -й точки системы будет выполнено равенство $(\mathbf{F}_k^{akt} + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{s}_k = 0$, и, следовательно, $\sum_k (\mathbf{F}_k^{akt} + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{s}_k = 0$. Учитывая теперь, что все реакции связей идеальны, т.е. $\sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{s}_k = 0$, получаем требуемое соотношение (2.10).

2. *Достаточность*. Нам требуется доказать здесь, что если механическая система покоилась в начальный момент времени $t = 0$, то она останется в покое, если выполнено соотношение (2.10). Доказательство проведем от противного. Пусть, напротив, система придет в движение и некоторые ее точки совершат действительное перемещение $d\mathbf{s}_k$. Согласно теореме об изменении кинетической энергии:

$$dT = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot d\mathbf{s}_k + \sum_k \mathbf{R}_k \cdot d\mathbf{s}_k. \quad (2.11)$$

Так как при $t = 0$ система была в покое и, согласно нашему допущению, пришла в движение, то $dT = T(dt) - T(0) > 0$. Учтем теперь, что для рассматриваемых связей действительное перемещение системы является одним из возможных. Тогда, в силу идеальности связей, должно выполняться равенство $\sum_k \mathbf{R}_k \cdot d\mathbf{s}_k = 0$, а из (2.11) следует, что $\sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot d\mathbf{s}_k > 0$. Мы получили противоречие с равенством (2.10), что и доказывает утверждение.

Принцип возможных перемещений дает общее условие равновесия механической системы, позволяющее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей и не требующее рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) системы.

2.6. Применение принципа к простейшим машинам

Простейшими машинами называют механические системы с одной степенью свободы, на которые действуют движущая сила \mathbf{P}_d или вращающий момент M_d и сила сопротивления \mathbf{P}_s или момент сопротивления M_s . Предположим, что простейшая машина находится в равновесии. Установим связь между движущей силой (моментом) и силой (моментом) сопротивления. Рассмотрим два примера.

1. *Полиспа́ст*. Для вытягивания (или для подъема) тяжелых грузов используется устройство, называемое полиспа́стом (на рис. 2.8 изображен одинарный полиспа́ст). Рассмотрим в качестве механической системы груз D вместе с нитью и блоками. Силу трения \mathbf{F}_f будем условно считать активной силой, наряду с движущей силой \mathbf{P} . Пусть возможное перемещение системы соответствует бесконечно малому перемещению груза вправо на величину δs_D . Так как расстояние между грузом и неподвижным блоком уменьшится при этом на величину δs_D ,

то нить в точке приложения силы \mathbf{P} вытянется, очевидно, на величину $\delta s_p = 2\delta s_D$ (см. рис. 2.8). Поэтому уравнение работ (2.10) будет иметь вид $P\delta s_p - F_f\delta s_D + mg\delta s_D \cos 90^\circ = 0$, или $P2\delta s_D - F_f\delta s_D = 0$. Следовательно, $P = F_f / 2$.

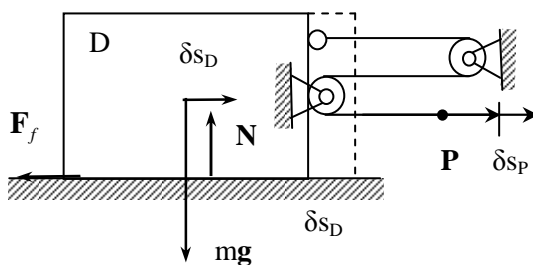


Рис. 2.8

Если бы мы вытягивали груз напрямую (без полиспаста), то, очевидно, тянущая сила была бы равна $P = F_f$. Применение одинарного полиспаста (конечно же, при условии отсутствия трения в блоках) позволяет, таким образом, получить выигрыш в силе в два раза. При этом мы должны вытягивать нить на вдвое большую длину (так как $\delta s_p = 2\delta s_D$). Мы получили результат, согласующийся с золотым правилом механики (вспомни, читатель, школьный курс физики): во сколько раз выигрываешь в силе, во столько же раз проигрываешь в расстоянии.

Двойной полиспаст (рис. 2.9), при отсутствии трения в блоках, дает выигрыш в силе в четыре раза ($P = F_f / 4$), тройной – в шесть раз ($P = F_f / 6$). Реально в технике более чем тройные полиспасты не применяются из-за нарастания сил трения в блоках и увеличения длины вытягиваемой нити (троса).

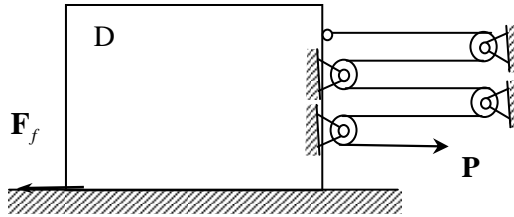


Рис. 2.9

2. *Клиновой пресс.* Установим теперь зависимость между движущей силой \mathbf{P} и силой сопротивления \mathbf{F} сжимаемого тела при равновесии клинового пресса (рис. 2.10). Для этого сообщим системе возможное перемещение, указанное пунктиром на рис. 2.10. Зависимость между возможными перемещениями δs_P и δs_F следует из рассмотрения треугольника перемещений CC_1D : $\delta s_F = CD = 2\delta s_P \operatorname{tg} \alpha$. Уравнение работ (2.10) дает нам $P\delta s_P - F\delta s_F = 0$, следовательно, $F = P/2\operatorname{tg} \alpha$. То есть, надавливая на клин с силой P , мы можем получить значительно большую силу сопротивления F . Причем чем меньше угол клина α , тем больший выигрыш в силе сопротивления получается (при этом мы проигрываем во столько же раз в расстоянии, на которое опустится клин). При рассмотрении этого примера мы пренебрегли силой трения клина о его направляющие.

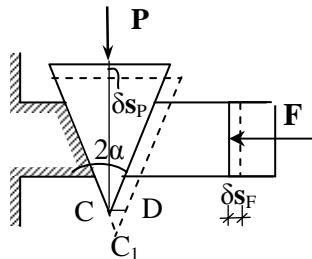


Рис. 2.10

Заметим, что в обоих рассматриваемых примерах мы бы могли в качестве возможных перемещений взять и перемещения $\delta x'_D = -\delta x_D$, $\delta x'_P = -\delta x_P$, т.е. возможное перемещение груза влево в первом примере и возможное перемещение клина вверх во втором примере. Легко видеть, что в этих случаях мы бы получили те же результаты.

2.7. Применение принципа к определению реакций связей

В статике часто приходится определять реакции связей, действующие на покоящуюся конструкцию, не имеющую ни одной степени свободы. В этом случае принцип возможных перемещений можно применять следующим образом. Сначала отбросить ту связь, реакцию которой требуется определить. То есть заменить ее искомой реакцией связи. При этом данную реакцию условно считать активной силой. После этого система, освобожденная от одной связи (если она статически определима), уже имеет одну степень свободы. Теперь к этой новой системе можно применить принцип возможных перемещений. Сообщив ей возможное перемещение, соответствующее появившейся степени свободы, составить уравнение работ (2.10), в которое войдут как заданные активные силы, так и реакция отброшенной связи. И наконец, из этого уравнения найти требуемую реакцию.

Задача 2.1. На левую часть трехшарнирной арки (рис. 2.11а) действует вертикальная нагрузка \mathbf{P} . Линия ее действия отстоит от шарнира A на расстоянии a , высота арки h , пролет арки $2l$. Определить горизонтальную реакцию шарнира B .

Решение

1. Высвободим искомую горизонтальную составляющую реакции шарнира B , но так, чтобы вертикальная составляющая реакции шарнира осталась в связи. Это можно сделать, заменив, например, неподвижный шарнир B подвижным шарниром на горизонтальных катках (см. рис. 2.11б). Высвобо-

дившуюся реакцию x_B будем уже считать активной силой, наряду с силой P .

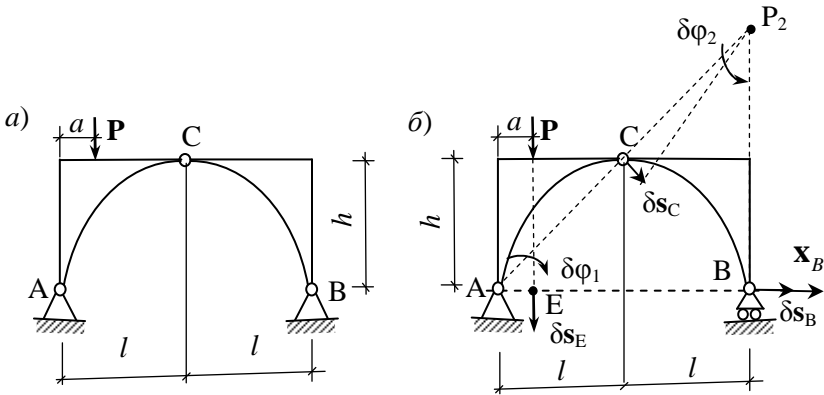


Рис. 2.11

2. Полученная система теперь имеет одну степень свободы. Дадим ей возможное перемещение. Левая часть 1 системы имеет неподвижную точку A , поэтому для нее возможным перемещением будет бесконечно малый поворот $\delta\varphi_1$ вокруг этой точки, например, по часовой стрелке. Возможное перемещение δs_C точки C при этом будет перпендикулярным AC в сторону вращения левой части арки.

Чтобы определить возможное перемещение правой части 2 арки, построим для нее мгновенный центр скоростей (МЦС). Так как возможное перемещение δs_B точки B должно быть горизонтальным, то, восстанавливая перпендикуляры к векторам δs_C и δs_B в точках их приложения C и B , найдем положение МЦС в точке их пересечения P_2 (здесь мы используем знания кинематики, обращаясь с возможными перемещениями точек, как с их скоростями). Следовательно, возможным перемещением правой части 2 будет поворот вокруг точки P_2 на

бесконечно малый угол $\delta\varphi_2$ по часовой стрелке (то, что именно по часовой стрелке, следует из направления перемещения δs_C точки C).

3. Чтобы упростить уравнение работ (2.10), перенесем силу \mathbf{P} вдоль линии ее действия в точку E . Ее возможное перемещение δs_E направлено вдоль линии действия силы \mathbf{P} . Тогда уравнение работ запишется в виде $P\delta s_E + X_B\delta s_B = 0$, откуда $X_B = -P(\delta s_E / \delta s_B)$. Учтем теперь, что $\delta s_E = AE\delta\varphi_1 = a\delta\varphi_1$, $\delta s_B = P_2B\delta\varphi_2 = 2h\delta\varphi_2$. Следовательно, $X_B = -(Pa/2h)(\delta\varphi_1 / \delta\varphi_2)$. Для установления связи между $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ рассмотрим точку C , являющуюся общей для левой и правой частей арки, а потому $\delta s_C = AC\delta\varphi_1 = CP_2\delta\varphi_2$. Так как $AC = CP_2$, то $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$, и мы получаем, что $X_B = -Pa/2h$. Знак «минус» указывает на то, что горизонтальная реакция шарнира B направлена вправо.

2.8. Рекомендации по решению задач на применение принципа

Прежде чем применять данный принцип, необходимо проверить, действительно ли все связи, действующие на рассматриваемую систему, стационарные удерживающие голономные и идеальные. Если в системе есть неидеальные связи – связи с трением, то необходимо все силы трения (все «неидеальности») перевести в разряд активных сил. Этим же способом можно применять принцип и к определению реакций связей, отбросив связь и заменив ее соответствующей реакцией, включив ее в число активных сил (см. п. 2.7). Отметим здесь, что часто в условиях задачи не оговаривается явно, но подразумевается, что рассматриваемая связь является удерживающей. Например, для нахождения силы \mathbf{P} , направленной под углом α к горизонту, при которой брусок весом \mathbf{Q} на шероховатой поверхности

будет находиться в равновесии (рис. 2.12), мы можем применять принцип возможных перемещений (предварительно переведя силу трения \mathbf{F}_f в разряд активных сил), если будем подразумевать, что брусок не отрывается от поверхности. В данном случае это соответствует рассмотрению только таких сил \mathbf{P} , для которых $N = Q - P \sin \alpha > 0$.

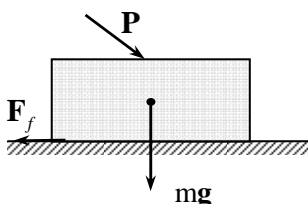


Рис. 2.12

Далее необходимо определить число степеней свободы механической системы, т.е. число независимых параметров, полностью описывающих ее положение. Обычно это делают следующим образом: фиксируют один параметр, и если после этого система двигаться не может, то у нее одна степень свободы, а если может – то фиксируют другой параметр и т.д.

Для наиболее простого случая системы с одной степенью свободы решение задачи целесообразно проводить в следующей последовательности:

1. *Изобразить все действующие на систему активные силы (и неидеальные реакции связей, если таковые имеются).*
2. *Сообщить системе возможное перемещение.* При этом следует изобразить на чертеже возможные перемещения δs_k точек и возможные повороты $\delta \varphi_k$ тел, к которым приложены активные силы \mathbf{F}_k .

3. Составить уравнения работ $\sum_k \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s}_k =$
 $= \sum_k F_k ds_k \cos \alpha_k = 0$, где α_k – угол между векторами \mathbf{F}_k

и $d\mathbf{s}_k$. Для упрощения уравнения работ следует иметь в виду, что силу можно переносить вдоль линии ее действия и что работу силы \mathbf{F} на перемещении $d\mathbf{s}$ при повороте тела вокруг оси l можно вычислять как работу момента этой силы на угле поворота $d\varphi$ вокруг этой же оси: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = M_l d\varphi$.

4. Выразить все $d\mathbf{s}_k$ и $d\varphi_k$, входящие в уравнение работ, через какое-нибудь одно и найти искомую величину. При нахождении зависимостей между величинами $d\mathbf{s}_k$ и $d\varphi_k$ можно использовать как геометрические соотношения, так и кинематические, считая, что эти зависимости такие же, как и между скоростями \mathbf{V}_k и угловыми скоростями ω_k для соответствующих точек и тел.

Для систем с несколькими степенями свободы задачу можно решать, составляя уравнения работ для каждого из независимых перемещений системы и преобразуя его описанным способом. В результате для системы получится столько уравнений равновесия, сколько она имеет степеней свободы.

Задача 2.2. Горизонтальный однородный брус 1 весом P_1 и длиной $l_1 = l$, закрепленный в точке A шарниром (рис. 2.13), соединен шарнирно в точке B с однородным брусом 2 весом P_2 и длиной $l_2 = l$, который концом C опирается на горизонтальный пол и составляет с ним угол α . Определить, при какой силе трения F_f о пол система будет в равновесии.

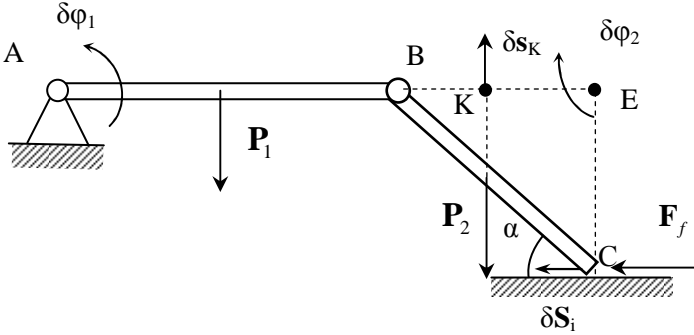


Рис. 2.13

Решение. Считаем, что брус 2 в точке C не отрывается (т.е. пол условно считаем удерживающей связью), а силу трения F_f будем считать активной силой, наряду с весом P_1 и весом P_2 грузов.

Возможным перемещением бруса AB будет поворот вокруг точки A на угол $\delta\varphi_1$, например, против часовой стрелки. При этом возможным перемещением бруса BC будет поворот на угол $\delta\varphi_2$ вокруг его МЦС, расположенного в точке E (см. рис. 2.13, точка E построена по известным направлениям возможных перемещений $\delta\mathbf{s}_B$ и $\delta\mathbf{s}_C$ точек B и C соответственно).

Для упрощения уравнения работ перенесем силу P_2 вдоль линии ее действия в точку K (см. рис. 2.13). Тогда

$$-P_1\delta s_1 - P_2\delta s_K + F_f\delta s_C = 0. \quad (2.12)$$

При этом

$$\delta s_1 = \delta\varphi_1 l / 2, \quad \delta s_K = \delta\varphi_2 l \cos \alpha / 2, \quad \delta s_C = \delta\varphi_2 EC = \delta\varphi_2 l \sin \alpha.$$

Связь между углами $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ получим, рассмотрев точку B , общую для двух брусков: $\delta s_B = \delta\varphi_1 l = \delta\varphi_2 l \cos \alpha$. Следовательно, $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 \cos \alpha$. Тогда из (2.12) получаем, что

$(-P_1/2 - P_2/2 + F_f \operatorname{tg} \alpha) \delta \varphi = 0$. Поэтому искомая сила трения $F_f = (P_1 + P_2) \operatorname{ctg} \alpha / 2$.

Заметим, что если бы мы решали эту задачу обычными методами статики, то с помощью лишь одного уравнения равновесия нам бы этого сделать не удалось.

Задача 2.3. Система из четырех однородных стержней OA, AB, BC и CO равной длины l и весом соответственно P_1, P_2, P_3 и P_4 , сочлененных шарнирами, находится в равновесии в вертикальной плоскости. Точка O закреплена шарнирно (рис. 2.14). Определить моменты пар m_1 и m_4 , которые нужно приложить к стержням OA и OC соответственно, чтобы при заданных углах φ и ψ система находилась в равновесии. Трением во всех шарнирах пренебречь.

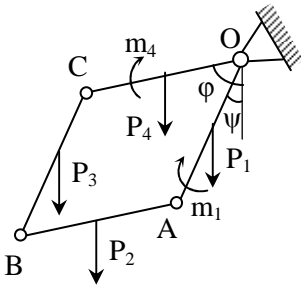


Рис. 2.14

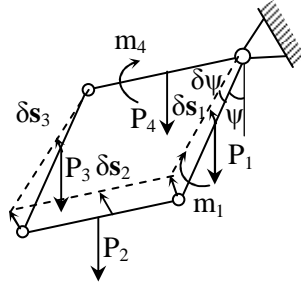


Рис. 2.15

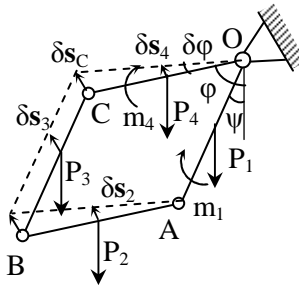


Рис. 2.16

Решение. Система стержней имеет две степени свободы. В качестве независимых параметров (обобщенных координат) можно взять углы φ и ψ . Действительно, если мы зафиксируем угол φ , то угол ψ может меняться, так как шарнирный ромб $OABC$ – фигура нежесткая. Задание же обоих углов φ и ψ , очевидно, полностью определяет положение системы.

Зафиксируем сначала угол φ и дадим системе возможное перемещение, соответствующее изменению $\delta\psi$ угла ψ (рис. 2.15). При фиксированном угле φ стержень OC будет оставаться на месте, следовательно, вес \mathbf{P}_4 и момент m_4 работы совершать не будут. Уравнение работ (2.10) тогда будет иметь вид

$$P_1\delta x_1 \cos(\psi + \pi/2) + P_2\delta x_2 \cos(\psi + \pi/2) + \\ + P_3\delta x_3 \cos(\psi + \pi/2) + m_1\delta\psi = 0.$$

Так как $\delta x_1 = \delta x_3 = l\delta\psi/2$, $\delta x_2 = \delta x_A = l\delta\psi$ (см. рис. 2.15), а $\cos(\psi + \pi/2) = -\sin\psi$, то $(-l\sin\psi(P_1 + 2P_2 + P_3)/2 + m_1)\delta\psi = 0$, или $m_1 = l\sin\psi(P_1 + 2P_2 + P_3)/2$.

Теперь, наоборот, зафиксируем угол ψ и дадим системе возможное перемещение, соответствующее изменению $\delta\varphi$ угла φ (рис. 2.16). При фиксированном угле ψ на месте будет оставаться стержень OC , и работы совершать не будут вес \mathbf{P}_1 и момент m_1 . Уравнение работ (2.10) тогда будет иметь вид

$$P_2\delta s_2 \cos(\varphi + \pi/2) + P_3\delta s_3 \cos(\varphi + \pi/2) + \\ + P_4\delta s_4 \cos(\varphi + \pi/2) + m_4\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta s_2 = \delta s_4 = l\delta\varphi/2$, $\delta s_3 = \delta s_C = l\delta\varphi$ (см. рис. 2.16), а $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin\varphi$, то $(-l\sin\varphi(P_2 + 2P_3 + P_4)/2 + m_4)\delta\varphi = 0$, или $m_4 = l\sin\varphi(P_2 + 2P_3 + P_4)/2$.

Решите, читатель, эту задачу обычными методами статики и определите, какой из двух способов предпочтительнее.

Задача 2.4. Определить реактивный момент M_A , возникающий в жесткой заделке составной рамы, изображенной на рис. 2.17, если $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 10$ кН, $M = 100$ кН·м, а размеры рамы указаны в метрах.

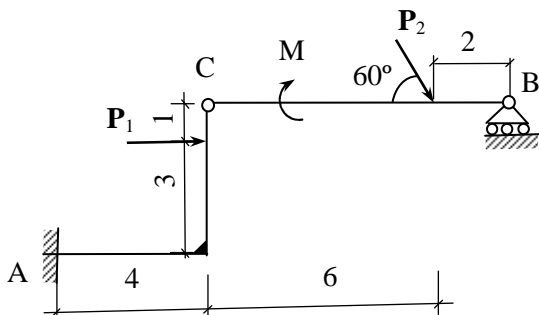


Рис. 2.17

Решение. Отбросим связь, препятствующую повороту рамы вокруг точки A . Для этого заменим жесткую заделку неподвижным шарниром и приложим к раме искомый момент M_A , считая его уже активным (рис. 2.18).

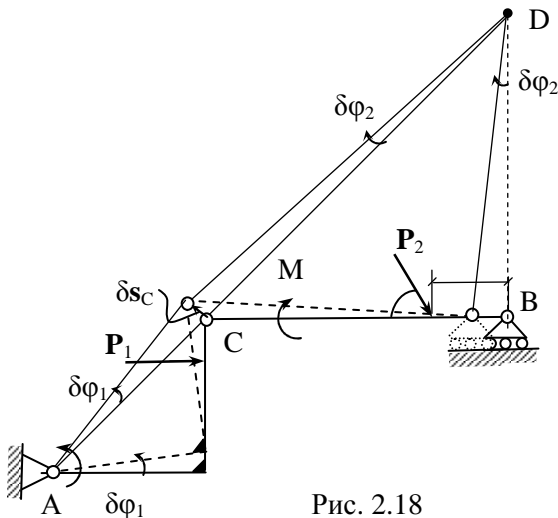


Рис. 2.18

Сообщим теперь системе возможное перемещение, повернув раму AC вокруг шарнира A на угол $\delta\varphi_1$, например, против направления движения часовой стрелки. Рама BC при этом повернется на угол $\delta\varphi_2$ по направлению движения часовой стрелки вокруг своего мгновенного центра скоростей D . Действительно, точку D найдем по известным направлениям возможных перемещений $\delta\mathfrak{s}_C$ и $\delta\mathfrak{s}_B$ точек C и B соответственно. Направление же поворота рамы BC вокруг точки D определится по уже найденному направлению возможного перемещения $\delta\mathfrak{s}_C$ точки C (рис. 2.18). Связь между углами $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ найдем, выразив возможное перемещение δs_C точки C : $\delta s_C = AC \cdot \delta\varphi_1 = DC \cdot \delta\varphi_2$. Следовательно, $\delta\varphi_2 = (AC/DC) \cdot \delta\varphi_1 = 0.5\delta\varphi_1$.

Составим теперь уравнение работ (2.10), учитывая, что работа силы при повороте тела равна моменту силы относительно центра вращения, умноженному на угол поворота тела, и положительна, если направления момента и поворота совпадают:

$$M_A \cdot \delta\varphi_1 - P_1 \cdot 3 \cdot \delta\varphi_1 - P_2 \cos 60^\circ \cdot 8 \cdot \delta\varphi_2 - P_2 \cos 30^\circ \cdot 2 \cdot \delta\varphi_2 + M \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

Подставляя сюда значение $\delta\varphi_2 = 0.5\delta\varphi_1$, получим $(M_A - 3P_1 - 2P_2 - 0.5P_2 + 0.5M) \cdot \delta\varphi_1 = 0$. Отсюда $M_A = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Знак «минус» указывает на то, что реактивный момент в жесткой заделке направлен по направлению вращения часовой стрелки.

2.9. Выражение принципа через обобщенные координаты

Запишем уравнение работ (2.10) в обобщенных координатах, воспользовавшись выражением (2.8):

$$\delta A^{akt} = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \delta \mathfrak{s}_k = \sum_j \left(\sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j = 0.$$

Величины $Q_j = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$, $j=1, \dots, s$, называют *обобщенными силами*, соответствующими обобщенным координатам q_j . Так как величины $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ независимы между собой (см. п. 2.3), то из равенства

$$\delta A^{akt} = \sum_j Q_j \delta q_j = 0 \quad (2.13)$$

следует, что

$$Q_j = 0, \quad j=1, \dots, s. \quad (2.14)$$

Действительно, для того чтобы показать, например, что $Q_3 = 0$, положим в уравнении (2.13), которое выполняется для любых возможных перемещений, $\delta q_1 = \delta q_2 = \delta q_4 = \dots = \delta q_s = 0$, $\delta q_3 \neq 0$.

Таким образом, для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для данной системы обобщенным координатам, были равны нулю. Число условий равновесия (2.14) равно, как видим, числу степеней свободы системы.

В рассмотренных выше задачах, мы, по существу, и вычисляли обобщенные силы, а затем приравняли их нулю. Отметим, что, в отличие от обычных сил (векторных величин), обобщенные силы являются скалярными величинами. Размерности их также могут не совпадать с размерностью обычной силы. Действительно, в силу равенства (2.13) размерность произведения $Q_j \delta q_j$ совпадает с размерностью работы, следовательно, $[Q_j] = [A]/[q_j]$. Если q_j линейная величина, то Q_j имеет размерность силы, если же q_j – угол, то Q_j будет измеряться в Н·м (в системе СИ) и иметь размерность момента и т.д.

Вопросы для самоконтроля

1. Как учитываются действия связей на систему в классической (ньютоновской) и аналитической механике?
2. Как определяются возможные (виртуальные) перемещения точек системы? Зависят ли они от действующих на систему сил? Чем они отличаются от действительных перемещений?
3. Какие величины называют обобщенными координатами системы?
4. Какие связи называют стационарными? Что означает термин «удерживающая связь»?
5. Какие связи называют голономными, а какие неголономными? Приведите примеры тех и других связей.
6. Как определяется число степеней свободы для голономных систем? Каково это число в случае вращательного движения твердого тела? А в случае плоского движения?
7. Какие связи называются идеальными? Приведите примеры идеальных и неидеальных связей.
8. В чем состоит принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)? Для каких связей, действующих на механическую систему, он применим?
9. Можно ли применить принцип возможных перемещений для системы, у которой одна из связей – шероховатая поверхность? А если одна из связей – неидеальный шарнир с трением?
10. Как вы думаете, для каких механических систем принцип возможных перемещений дает преимущество по сравнению с классическим методом расчета?
11. Когда механическую систему называют простейшей машиной? Приведите примеры простейших машин. В чем состоит золотое правило механики?
12. Как можно применять принцип возможных перемещений к определению реакций связей механической системы?

13. В какой последовательности лучше решать задачи на применение принципа возможных перемещений?
14. Какие величины называют обобщенными силами? Это векторные величины или скалярные? Совпадает ли их размерность с размерностью обычных сил?
15. Как формулируется принцип возможных перемещений в обобщенных координатах?

Упражнения

У2.1. Какой вращающий момент M нужно приложить к кривошпиту OA длиной $L = 10$ см, чтобы уравновесить силу $F = 50$ Н? Весом параллелограмма $OABC$ (рис. 2.19) и трением в шарнирах пренебречь.

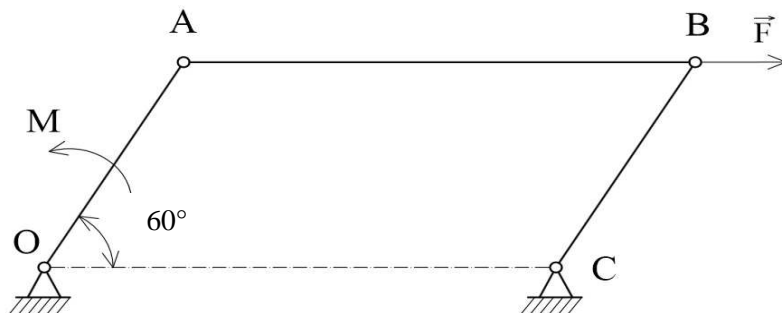


Рис. 2.19

У2.2. Определить вертикальную составляющую реакции шарнира A , если $F = 8$ кН. Весом конструкции (рис. 2.20) и трением в шарнирах пренебречь.

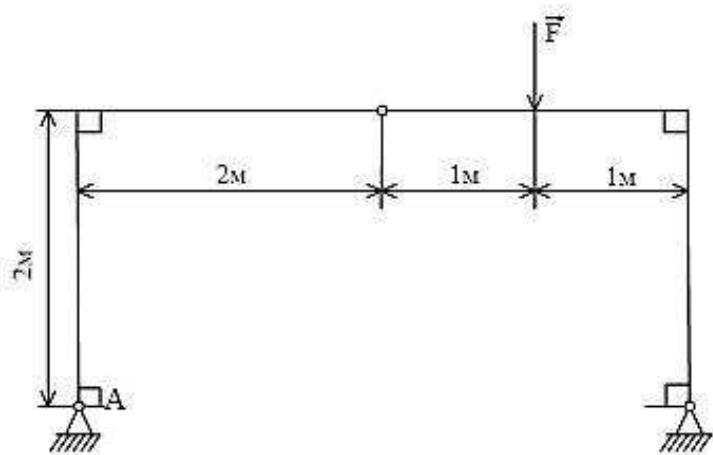


Рис. 2.20

У2.3. Определить модуль силы F , уравнивающей пару сил с моментом M , если $AB = L$. Весом конструкции (рис. 2.21) и трением в шарнирах пренебречь.

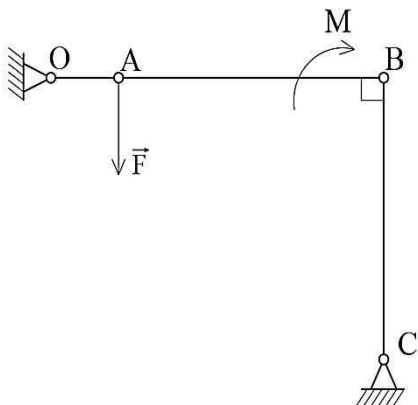


Рис. 2.21

Лекция 3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

3.1. Принцип Даламбера – Лагранжа (общее уравнение динамики)

Перейдем теперь к движущимся механическим системам. Напомним, что наша задача состоит в том, чтобы найти принцип выбора действительного движения точек системы среди всех возможных, дозволяемых связями. В случае покоящейся системы таким принципом был принцип Лагранжа (см. лекцию 2). Вместе с тем мы уже познакомились с принципом Даламбера (см. лекцию 1), который позволяет решать задачу динамики методами статики с помощью введения сил инерции. Объединив теперь эти два принципа вместе, мы получим общий метод решения задач динамики, который и будет называться принципом Даламбера – Лагранжа. Ясно, что мы должны сделать – сначала к активным силам, действующим на движущуюся систему, добавить силы инерции F_k^{in} и воспользоваться принципом Даламбера, а затем уже применить принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений). Конечно, при этом условия его применимости должны выполняться, т.е. связи, действующие на нашу систему, должны быть двусторонними, голономными и идеальными. Что же касается стационарности связей, то это требование можно опустить, т.е. мы будем рассматривать в этой лекции как стационарные, так и нестационарные связи. Дело в том, что стационарность связей в принципе возможных перемещений требовалась лишь при доказательстве его достаточности (доказательстве того, что если уравнение работ (2.10) выполняется, то система будет находиться в равновесии, см. лекцию 2), что нам сейчас не потребуется. В итоге мы получим уравнение работ в виде

$$\delta A^{akt} + \delta A^{in} = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \delta \mathbf{s}_k + \sum_k \mathbf{F}_k^{in} \cdot \delta \mathbf{s}_k = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) называется *общим уравнением динамики*. Таким образом, принцип Даламбера–Лагранжа заключается в следующем: *при движении механической системы с идеальными двусторонними голономными связями сумма работ всех активных сил и сил инерции на любом ее возможном перемещении равна нулю*.

Как и принцип Лагранжа, мы можем применять принцип Даламбера–Лагранжа и для связей с трением, предварительно переведя все силы трения в разряд активных сил. Точно так же можем определить и силу реакции идеальной связи, отбросив ее и условно считая эту реакцию активной силой. Что же касается рекомендаций по решению задач на применение общего уравнения динамики, то они остаются теми же, что и для решения задач на применение принципа возможных перемещений (см. п. 2.8), с той лишь разницей, что наряду с активными силами нужно еще рассматривать и силы инерции. Если при этом механическая система состоит из нескольких твердых тел, то силы инерции для каждого из них следует сначала привести к главному вектору и к главному моменту относительно точки приведения, как это мы делали, когда применяли принцип Даламбера (см. п. 1.3 лекции 1).

Задача 3.1. К системе невесомых идеальных блоков с помощью гибких и нерастяжимых нитей подвешены грузы A и B весом $P_A = 100$ Н и $P_B = 80$ Н (рис. 3.1). Определить ускорения грузов.

Решение. В качестве механической системы рассмотрим всю конструкцию. По условию задачи, действующие на нее связи идеальные голономные удерживающие, поэтому принцип Даламбера–Лагранжа применять можно. Активные силы – вес

груза \mathbf{P}_A и вес груза \mathbf{P}_B . Так как грузы движутся поступательно, то их силы инерции сводятся к равнодействующим $\mathbf{F}_A^{in} = -m_A \mathbf{a}_A$ и $\mathbf{F}_B^{in} = -m_B \mathbf{a}_B$, приложенным в центрах масс грузов и направленным противоположно их ускорениям.

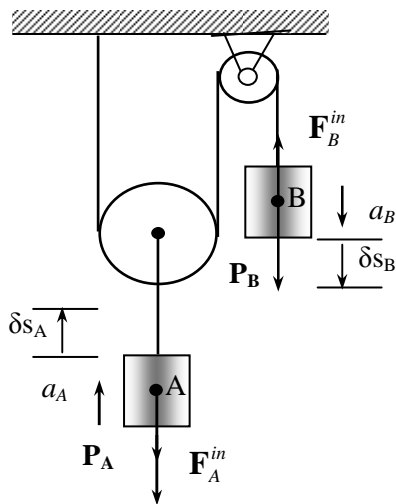


Рис. 3.1

Дадим теперь грузу B возможное перемещение $\delta \mathbf{s}_B$, направленное, например, вниз. Тогда возможное перемещение $\delta \mathbf{s}_A$ груза A будет направлено вверх. Общее уравнение динамики (3.1) запишется в виде $(\mathbf{P}_A + \mathbf{F}_A^{in}) \cdot \delta \mathbf{s}_A + (\mathbf{P}_B + \mathbf{F}_B^{in}) \cdot \delta \mathbf{s}_B = 0$. Раскрывая скалярные произведения и подставляя значения сил инерции, получим

$$-P_A \delta s_A - (P_A / g) a_A \delta s_A + P_B \delta s_B - (P_B / g) a_B \delta s_B = 0. \quad (3.2)$$

Так как нить нерастяжима и не скользит по блокам, то из кинематики $\delta s_B = 2\delta s_A$ и $a_B = 2a_A$ (покажите это, читатель, самостоятельно). Подставляя теперь эти выражения в (3.2) и учитывая, что $\delta s_A \neq 0$, получаем

$$a_A = g(2P_B - P_A)/(4P_B + P_A). \quad (3.3)$$

Следовательно, $a_A = 1.4 \text{ м/с}^2$, $a_B = 2.8 \text{ м/с}^2$.

Заметим, что если бы мы решали задачу в общем виде при произвольных весах грузов, то ускорение груза A мы также могли бы направить условно вверх и получили бы выражение (3.3). В случае $P_B > 0.5P_A$ мы бы угадали – груз A будет ускоренно подниматься. В случае $P_B < 0.5P_A$, как это следует из (3.3), он будет ускоренно опускаться. В случае же $P_B = 0.5P_A$ груз A будет либо покоиться, либо двигаться равномерно вверх или вниз, в зависимости от начальных условий задачи.

Задача 3.2. Однородный цилиндр весом P обмотан нитью, перекинутой через блок и прикрепленной к грузу A весом Q (рис. 3.2). Груз может скользить по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f . Найти ускорение груза a_A и ускорение a_C центра масс цилиндра. Массой блока и нити пренебречь.

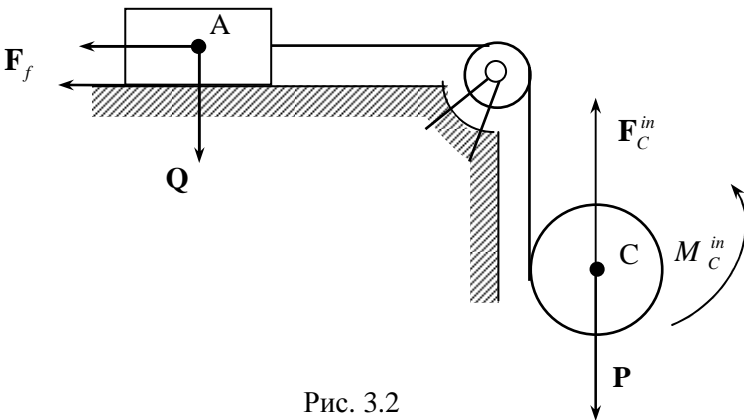


Рис. 3.2

Решение. Силу трения \mathbf{F}_f груза о плоскость переведем в разряд активных сил. Поскольку трением в блоке пренебрегаем, связи можно считать идеальными и голономными. Горизонтальную поверхность считаем двусторонней, так как груз от нее по смыслу задачи не отрывается. Таким образом, условия для применения принципа Даламбера – Лагранжа выполнены.

Система активных сил и сил инерции груза и цилиндра показана на рис. 3.2. Силы инерции груза сводятся к равнодействующей $\mathbf{F}_A^{in} = -(Q/g)\mathbf{a}_A$, а силы инерции цилиндра – к главному вектору $\mathbf{F}_C^{in} = -(P/g)\mathbf{a}_C$ и к главному моменту $M_C^{in} = -J_C\varepsilon$ относительно центра масс цилиндра. Поскольку цилиндр однородный, то $J_C = Pr^2/2g$, где r – радиус цилиндра. Для углового ускорения цилиндра из кинематики легко получить выражение $\varepsilon = (a_C - a_A)/r$ (выведите его самостоятельно, читатель).

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. Движение груза полностью определится его перемещением s_A вдоль горизонтальной плоскости, а для задания движения цилиндра еще нужно знать угол его поворота φ . В качестве возможных перемещений системы возьмем следующие:

1. Пусть $\delta s_A \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Общее уравнение динамики, соответствующее такому возможному перемещению системы, будет иметь вид

$$(-F_f - F_A^{in} + P - F_C^{in})\delta s_A = 0, \text{ или } F_f + F_A^{in} - P + F_C^{in} = 0, \quad (3.4)$$

где $F_f = fN = fQ$.

2. Пусть теперь, наоборот, $\delta s_A = 0$, $\delta\varphi \neq 0$. В этом случае общее уравнение динамики сведется к следующему:

$$(P - F_C^{in})r\delta\varphi - M_C^{in}\delta\varphi = 0, \text{ или } (P - F_C^{in})r - M_C^{in} = 0. \quad (3.5)$$

Решая уравнения (3.4), (3.5) относительно искомым неизвестных a_A и a_C , найдем

$$a_A = (P - 3fQ)g / (P + 3Q), \quad a_C = (P + 2Q - 2fQ)g / (P + 3Q). \quad (3.6)$$

Полученное решение показывает, что груз будет двигаться только при дополнительном условии на параметры задачи: $P > 3fQ$, или $f < P/3Q$. В противном случае груз будет находиться в покое, система будет иметь одну степень свободы и цилиндр будет сматываться с нити с ускорением $a_C = 2g/3$.

3.2. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

Повторяя выкладки п. 2.9 лекции 2, запишем уравнение работ (2.10) в обобщенных координатах:

$$\delta A^{akt} + \delta A^{in} = \sum_j (Q_j + Q_j^{in}) \delta q_j = 0. \quad (3.7)$$

Здесь по-прежнему $Q_j = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$, $j = 1, \dots, s$, – обобщенные

силы, соответствующие обобщенным координатам q_j , а через

$Q_j^{in} = \sum_k \mathbf{F}_k^{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$ обозначены величины, называемые *обобщенными силами инерции*.

В силу независимости возможных перемещений $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ обобщенных координат (напомним, мы рассматриваем лишь голономные связи), из равенства (3.7) следуют соотношения

$$Q_j + Q_j^{in} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3.8)$$

Уравнениями (3.8) можно непосредственно пользоваться при решении задач динамики. Однако составление этих уравнений требует большого количества преобразований, которые есть смысл проделать один раз в общем виде, имея целью получить дифференциальные уравнения для обобщенных координат

q_1, q_2, \dots, q_s . Для этого выразим обобщенные силы инерции Q_j^{in} через кинетическую энергию $T = \sum_k m \mathbf{v}_k^2 / 2$ системы

$$\begin{aligned}
 Q_j^{in} &= \sum_k \mathbf{F}_k^{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_k m_k \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_k m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \\
 &= - \sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) - \mathbf{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \right] = \\
 &= - \sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) - \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j} \right] = \\
 &= - \sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial (\mathbf{v}_k^2 / 2)}{\partial q_j} \right].
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для осуществления дальнейших преобразований нам нужно еще разобраться с величинами $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$. Для этого запишем скорость \mathbf{v}_k через производную от радиус-вектора \mathbf{r}_k по времени, выраженного через обобщенные координаты $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \dots, q_s, t)$:

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j. \tag{3.10}$$

Производные \dot{q}_j обобщенных координат q_j называются *обобщенными скоростями*.

Дифференцируя обе части равенства (3.10) частным образом по обобщенной скорости, получим тождество:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}. \tag{3.11}$$

Продолжим теперь преобразования (3.9) с учетом этого тождества:

$$\begin{aligned}
Q_j^{in} &= -\sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (\mathbf{v}_k^2 / 2)}{\partial q_j} \right] = \\
&= -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 / 2 \right) + \frac{\partial \left(\sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 / 2 \right)}{\partial q_j}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_j^{in} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

и уравнения (3.8) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, s. \quad (3.12)$$

Мы получили дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, которые и называются *уравнениями Лагранжа второго рода*. Так как кинетическая энергия системы зависит от обобщенных скоростей (в общем случае $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$), то уравнения Лагранжа второго рода представляют собой систему из s дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_1, \dots, q_s .

Основная (обратная) задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы по известным обобщенным силам Q_1, \dots, Q_s и начальным условиям найти закон движения системы, т.е. определить зависимость обобщенных координат от времени $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_s = q_s(t)$.

Если же, наоборот, задан закон движения системы (прямая задача), то уравнения (3.12) позволяют найти обобщенные силы, а по ним уже восстановить активные силы, действующие на механическую систему.

Обобщенные силы при этом полностью определяются активными силами, действующими на механическую систему,

и неидеальными реакциями связей. Достоинство уравнений Лагранжа второго рода заключается в том, что они позволяют исключить из рассмотрения все идеальные связи. Кроме того, их вид и число не зависят ни от количества тел в системе, ни от вида их движения. Для сложных механических систем эти уравнения являются основным инструментом исследования их движения и успешно применяются в инженерных расчетах. Их роль для движения механических систем можно сравнить с ролью уравнения Ньютона для динамики точки. При большом числе степеней свободы (в современных расчетах s может достигать значений нескольких тысяч, а то и миллионов!), система уравнений (3.12) решается численно на ЭВМ.

3.3. Рекомендации по решению задач на применение уравнений Лагранжа второго рода

Рекомендации по решению задач на применение уравнений Лагранжа второго рода во многом похожи на те, которые мы давали по решению задач на применение принципа возможных перемещений (см. п. 2.8 лекции 2).

Прежде чем решать задачу, нужно убедиться, что все связи, действующие на рассматриваемую механическую систему, являются удерживающими и голономными. Если связь неудерживающая (поверхность или линия), то уравнения Лагранжа второго рода можно применять, рассматривая лишь те возможные перемещения, которые удерживают точки на этой связи (поверхности или линии). При наличии связей с трением, все силы трения нужно перевести в разряд активных сил.

Далее решение следует проводить, соблюдая следующую последовательность:

1. *Изобразить все активные силы (и реакции неидеальных связей, если таковые имеются, условно считая их активными силами).*
2. *Определить число степеней свободы s и ввести обобщенные координаты q_1, \dots, q_s .*

3. Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты, обобщенные скорости и время, т.е. получить зависимость $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$.

4. Найти обобщенные силы Q_1, \dots, Q_s . Для нахождения силы Q_j следует сообщить системе возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_j , т.е. перемещение вида $\delta q_i = 0, i \neq j, \delta q_j \neq 0$. При этом точки k системы, в которых приложены активные силы \mathbf{F}_k^{akt} , получают возможные перемещения $\delta \mathbf{s}_k$. Затем следует составить сумму возможных работ всех активных сил $\delta A_j = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \delta \mathbf{s}_k$ и выразить все $\delta \mathbf{s}_k$ через δq_j .

Записывая возможную работу δA_j в виде

$$\delta A_j = \sum_k \mathbf{F}_k^{akt} \cdot \delta \mathbf{s}_k = Q_j \delta q_j,$$

получим обобщенную силу Q_j .

5. Написать начальные условия задачи: $q_j(0) = q_{j0}, \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}$.

6. Составить уравнения Лагранжа второго рода и проинтегрировать их с учетом начальных условий.

Задача 3.3. Однородный цилиндр радиуса r и весом P катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного полуцилиндра радиуса R под действием только силы тяжести (рис. 3.3). Найти период малых колебаний цилиндра около его положения равновесия.

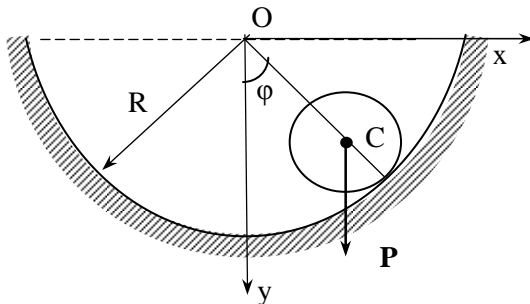


Рис. 3.3

Решение. Составим для решения задачи уравнение Лагранжа второго рода, рассматривая в качестве механической системы цилиндр. Так как он катится без проскальзывания, то связь – внутренняя поверхность полуцилиндра – является идеальной. Цилиндр не отрывается от полуцилиндра, поэтому данную связь можно считать удерживающей. Кроме того, она чисто геометрическая (голономная), тем самым удовлетворяет всем требованиям для применимости уравнений Лагранжа второго рода.

Единственной активной силой, действующей на цилиндр, является его вес \mathbf{P} . Движение цилиндра (качение без проскальзывания) полностью определяется углом φ прямой OC с вертикальной осью Oy (см. рис. 3.3), который мы и примем за обобщенную координату. То есть в нашей задаче $s = 1$, $q_1 = \varphi$.

Кинетическую энергию цилиндра посчитаем по формуле $T = J_A \omega^2 / 2$ (точка A – МЦС цилиндра). По теореме Гюйгенса $J_A = J_C + mr^2$, где $m = P/g$ – масса цилиндра, а $J_C = mr^2 / 2$ – его момент инерции относительно центра масс. Следовательно, $T = 3mr^2 \omega^2 / 4$. Связь ω с $\dot{\varphi}$ получим из кинематического соотношения $v_C = \omega r = \dot{\varphi} OC = \dot{\varphi}(R - r)$. Поэтому $T = 3m(R - r)^2 \dot{\varphi}^2 / 4$.

Обобщенную силу Q_1 найдем, определив работу веса на возможном перемещении цилиндра, соответствующем возможному изменению $\delta\varphi$ угла φ . Эта работа равна

$\delta A = P\delta y_c = P\delta[(R-r)\cos\varphi] = -P(R-r)\sin\varphi\delta\varphi$. Следовательно, $Q_1 = -P(R-r)\sin\varphi$.

Уравнение Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1$ в нашем случае будет иметь вид

$$3m(R-r)^2\ddot{\varphi} = -mg(R-r)\sin\varphi, \text{ или } \ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0,$$

где $k^2 = 2g/3(R-r)$.

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$, и уравнение преобразуется к виду

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение свободных колебаний с частотой k . Период этих колебаний $T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$.

Заметим, что данную задачу мы могли бы решить, применяя общие теоремы динамики. Например, теорему о движении центра масс и теорему моментов относительно центра масс цилиндра. В этом случае, однако, мы должны были бы учесть реакцию шероховатого полуцилиндра (нормальную и силу трения). Предоставим это вам, читатель, в качестве упражнения.

Задача 3.4. Два груза весом P_1 и весом P_2 , связанные между собой пружиной жесткостью c , могут двигаться без трения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 3.4). Найти закон движения грузов, если в начальный момент времени их скорости равнялись нулю, а пружина имела длину $0.5l_0$, где l_0 – длина свободной пружины.

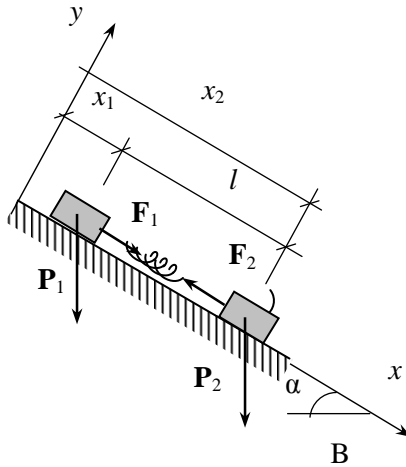


Рис. 3.4

Решение. В качестве механической системы рассмотрим грузы с пружиной. Тогда гладкая наклонная плоскость для нее будет идеальной и голономной связью. Поскольку грузы от плоскости не отрываются, можем считать эту связь удерживающей и применять уравнения Лагранжа второго рода.

К активным силам относятся внешние силы \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 – вес грузов, а также внутренние силы упругости пружины \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 (см. рис. 3.4). Причем $F_1 = F_2 = c\lambda$, где $\lambda = l - l_0$ – удлинение пружины.

Система имеет две степени свободы, $s = 2$. В качестве обобщенных координат возьмем координаты грузов x_1 и x_2 в системе координат Oxy . Точку O выберем так, чтобы в начальный момент времени $t = 0$, $x_1(0) = 0$. Тогда $x_2(0) = 0.5l_0$, а $\lambda = x_2 - x_1 - l_0$.

Кинетическая энергия системы равна $T = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 \dot{x}_1^2 / 2 + m_2 \dot{x}_2^2 / 2$, где $m_1 = P_1 / g, m_2 = P_2 / g$ – массы грузов.

Для нахождения обобщенных сил Q_1 и Q_2 дадим системе возможное перемещение, соответствующее возможным перемещениям грузов δx_1 и δx_2 . Тогда возможная работа активных сил на этих перемещениях

$$\begin{aligned} \delta A^{akt} &= (P_1 \sin \alpha + F_1) \delta x_1 + (P_2 \sin \alpha - F_2) \delta x_2 = \\ &= (P_1 \sin \alpha + c\lambda) \delta x_1 + (P_2 \sin \alpha - c\lambda) \delta x_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $Q_1 = P_1 \sin \alpha + c\lambda$, $Q_2 = P_2 \sin \alpha - c\lambda$.

Теперь составим уравнения Лагранжа второго рода (3.12):

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin \alpha + c\lambda, \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin \alpha - c\lambda. \quad (3.13)$$

Конечно же, читатель, глядя на эти уравнения, вы уже догадались, что их значительно проще получить из второго закона Ньютона, применив его к каждому из грузов в отдельности (получилось, как говорят, «из пушки по воробьям», зато мы еще раз продемонстрировали, как заряжается «пушка»).

Нам осталось теперь проинтегрировать уравнения (3.13) при начальных данных $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0.5l_0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Для этого умножим первое из уравнений (3.13) на $-m_2$, а второе на m_1 и сложим их. Тогда получим уравнение $m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -c(m_1 + m_2)\lambda$. Используя равенство $\lambda = x_2 - x_1 - l_0$, перепишем его в виде $\ddot{\lambda} + k^2 \lambda = 0$, где $k^2 = c(m_1 + m_2) / m_1 m_2$. Его решение мы знаем: $\lambda = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$. Из начальных условий находим, что $C_1 = 0, C_2 = -0.5l_0$. Следовательно, мы получили, что

$$x_2 - x_1 = l_0 - 0.5l_0 \cos kt. \quad (3.14)$$

Второе соотношение получим, сложив уравнения (3.13): $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha$. Перепишем последнее равенство

в виде $\frac{d^2}{dt^2}(m_1x_1 + m_2x_2) = (m_1 + m_2)g \sin \alpha$ и дважды проинтегрируем с учетом начальных данных. Тогда

$$(m_1x_1 + m_2x_2) = (m_1 + m_2)g \sin \alpha \cdot t^2 / 2 + m_2l_0 / 2. \quad (3.15)$$

Из уравнений (3.14) и (3.15) находим закон движения грузов:

$$x_1 = g \sin \alpha \cdot t^2 / 2 - 0.5m_2l_0[1 - \cos kt] / (m_1 + m_2),$$

$$x_2 = g \sin \alpha \cdot t^2 / 2 + 0.5m_1l_0[1 - \cos kt] / (m_1 + m_2) + 0.5l_0.$$

Видим, что движение грузов складывается из двух движений – равномерно ускоренного движения с ускорением $g \sin \alpha$, обусловленного силой тяжести, и гармонического колебания с частотой k , обусловленного действием пружины.

3.4. Уравнения Лагранжа второго рода в случае консервативных систем

Напомним, что под консервативной системой мы понимаем механическую систему, в которой все действующие на нее силы \mathbf{F}_k консервативны, т.е. имеют потенциал. При этом связь между \mathbf{F}_k и потенциальной энергией Π системы дается формулами

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}. \quad (3.16)$$

Покажем, что в этом случае обобщенные силы Q_j , $j=1, \dots, s$, связаны с потенциальной энергией системы формулами

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j=1, \dots, s, \quad (3.17)$$

т.е. в случае консервативной системы обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j , равна взятой со знаком «минус» частной производной от потенциальной энергии механической системы по этой координате.

Действительно,

$$Q_j = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \sum_k \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) = \\ - \sum_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Так как потенциальная энергия системы является функцией декартовых координат точек системы, $\Pi = \Pi(x_k, y_k, z_k)$, а последнее, в свою очередь, являются функциями ее обобщенных координат, $x_k = x_k(q_1, \dots, q_s, t)$, $y_k = y_k(q_1, \dots, q_s, t)$, $z_k = z_k(q_1, \dots, q_s, t)$, то, по правилам дифференцирования сложной функции, $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right)$, откуда и следует формула (3.17).

Уравнения Лагранжа второго рода для консервативных систем тогда принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3.18)$$

Если мы введем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и учтем, что потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей, то уравнения (3.18) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.19) называются *уравнениями Лагранжа второго рода для консервативных систем*. Они широко используются, в частности, при изучении свободных колебаний механических систем с одной или несколькими степенями свободы.

Задача 3.5. Определить период свободных колебаний груза весом G , лежащего на двухопорной балке AB (рис. 3.5). Рас-

стояния от груза до опор балки равны a и b . Модуль упругости материала балки равен E , момент инерции поперечного сечения J . Весом балки пренебречь.

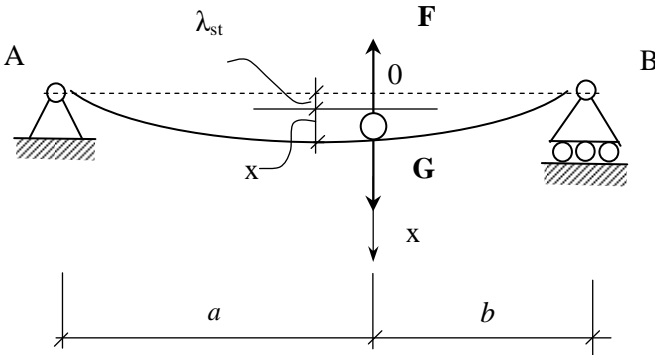


Рис. 3.5

Решение. В качестве механической системы рассмотрим груз вместе с балкой. Связями для нее будут неподвижный шарнир A и подвижный шарнир B . Пренебрегая трением в шарнирах и считая шарнир B удерживающим, видим, что все условия для применимости уравнений Лагранжа второго рода выполнены.

Активными силами, действующими на систему, будут вес груза G и сила упругости балки F . Обе силы являются консервативными, поэтому уравнение (3.19) применимо.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем перемещение груза x , отсчитываемое от положения его равновесия.

Кинетическая энергия системы будет равна кинетической энергии груза (весом балки пренебрегаем): $T = mv^2 / 2 = m\dot{x}^2 / 2$, $m = G / g$. Потенциальная энергия определяется как сумма потенциальной энергии веса груза и потенциальной энергии силы упругости балки:

$$П = -Gx + [c(\lambda_{st} + x)^2 / 2 - c\lambda_{st}^2 / 2], \quad (3.20)$$

где c – жесткость балки, а λ_{st} – ее статический прогиб. Так как в состоянии покоя $G = c\lambda_{st}$, то из (3.20) следует, что $\Pi = cx^2/2$. Тогда функция Лагранжа $L = T - \Pi = m\dot{x}^2/2 - cx^2/2$, и уравнение (3.19) преобразуется к виду

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (3.21)$$

где $k^2 = c/m$. Уравнение (3.21) нам хорошо знакомо – это дифференциальное уравнение свободных колебаний груза с частотой k . Период этих колебаний $T_G = 2\pi/k$. Воспользовавшись еще формулой $c = 3EJ(a+b)/a^2b^2$, известной из курса сопротивления материалов, окончательно получим, что $T_G = 2\pi ab\sqrt{G/3EJg(a+b)}$.

Задача 3.6 (колебания эллиптического маятника). Ползун A массой m_A может перемещаться вдоль гладких горизонтальных направляющих (рис. 3.6).

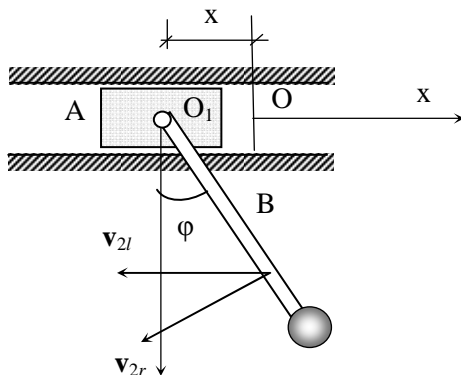


Рис. 3.6

Маятник B имеет массу m_B , момент инерции J относительно точки подвеса O_1 . Расстояние от точки подвеса до центра масс O_2 равно h . Составить дифференциальные уравнения движения системы и определить закон движения каждого из тел в случае малых углов отклонения маятника от вертикали, если начальные скорости равны нулю.

Решение. В качестве механической системы рассмотрим оба тела вместе – ползун и маятник. Она будет подчинена действию двух связей (внешней связью для нее будут гладкие направляющие, а внутренней – идеальный шарнир O_1). Видим, что обе связи таковы, что применять уравнения Лагранжа второго рода можно.

Система имеет две степени свободы, $s = 2$. В качестве обобщенных координат возьмем перемещение x ползуна и угол φ маятника с вертикалью.

Ползун движется поступательно, поэтому его кинетическая энергия $T_A = m_A v_A^2 / 2 = m_A \dot{x}^2 / 2$. Маятник совершает плоское движение, и для вычисления его кинетической энергии воспользуемся теоремой Кенига: $T_B = m_B v_2^2 / 2 + J_2 \omega^2 / 2$. Здесь $\omega = \dot{\varphi}$, v_2 – скорость центра масс O_2 маятника, а J_2 – его момент инерции относительно центра масс O_2 . Воспользуемся еще кинематической формулой $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{2r} + \mathbf{v}_{2e} = \mathbf{v}_{2r} + \mathbf{v}_A$. Тогда $v_2^2 = (v_A + \omega h \cos \varphi)^2 + (\omega h \sin \varphi)^2$. Учитывая теперь формулу Гюйгенса $J = J_2 + m_B h^2$, получим, что $T_B = m_B \dot{x}^2 / 2 + m_B h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J \dot{\varphi}^2 / 2$. Следовательно,

$$T = T_A + T_B = (m_A + m_B) \dot{x}^2 / 2 + m_B h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J \dot{\varphi}^2 / 2.$$

Так как вес ползуна при его горизонтальном перемещении работы не совершает, то потенциальная энергия системы будет равна потенциальной энергии веса маятника, т.е.

$$\Pi = -m_B gh \cos \varphi.$$

Уравнения (3.19) для нашей задачи примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(m_A + m_B)\dot{x} + m_B h \dot{\varphi} \cos \varphi] &= 0, \\ J\ddot{\varphi} + m_B h \ddot{x} \cos \varphi + m_B h g \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Заметим, что первое из уравнений (3.22) мы могли бы получить, воспользовавшись теоремой о движении центра масс системы в направлении оси x .

Интегрируя его, найдем, с учетом начальных условий $\dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, что $(m_A + m_B)\dot{x} + m_B h \dot{\varphi} \cos \varphi = 0$, или

$$\frac{d}{dt}[(m_A + m_B)x + m_B h \sin \varphi] = 0. \text{ Следовательно,}$$

$$(m_A + m_B)x + m_B h \sin \varphi = C.$$

Пусть при $t=0$ маятник отклонен на угол $\varphi(0) = \varphi_0$. Воспользуемся произвольностью выбора начала O оси x так, чтобы $(m_A + m_B)x(0) + m_B h \sin \varphi_0 = 0$. Тогда $C = 0$, и мы получаем связь между величинами x и φ :

$$(m_A + m_B)x + m_B h \sin \varphi = 0. \quad (3.23)$$

Второе дифференциальное уравнение (3.22) рассмотрим с учетом малости угла отклонения маятника от вертикали: $\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \approx 1$. Тогда из уравнения (3.23) будем иметь $x = -m_B h \sin \varphi / (m_A + m_B)$. Дифференцируя это выражение дваж-

ды по времени и подставляя значение \ddot{x} во второе уравнение (3.22), получим, с учетом малости угла φ :

$$(J - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B)) \ddot{\varphi} + m_B h g \varphi = 0. \quad (3.24)$$

Так как

$$\begin{aligned} J - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B) &= J_2 + m_B h^2 - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B) = \\ &= J_2 + m_A m_B h^2 / (m_A + m_B) > 0, \end{aligned}$$

то уравнение (3.24) описывает гармонические колебания $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$ с частотой $k = m_B h g / (J - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B))$. Его решение при начальных данных $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ имеет вид $\varphi = \varphi_0 \cos kt$.

При движении системы центр тяжести маятника $O_2(x_2, y_2)$ движется по эллипсу:

$$x_2 = x + h \sin \varphi = (m_A / (m_A + m_B)) h \sin \varphi, \quad y_2 = -h \cos \varphi,$$

поэтому маятник и называют эллиптическим.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называют общим уравнением динамики?
2. В чем состоит принцип Даламбера–Лагранжа? Почему его так называют?
3. При каких связях, действующих на механическую систему, можно применять принцип Даламбера–Лагранжа?
4. Как можно применять принцип Даламбера–Лагранжа, если среди связей есть связи с трением? А как его применять для определения реакции идеальной связи?
5. Можно ли применять принцип Даламбера–Лагранжа, если среди связей есть неударивающие?
6. Какие величины называют обобщенными силами инерции?

7. Как записывается общее уравнение динамики в обобщенных координатах?
8. Какие уравнения называют уравнениями Лагранжа второго рода? А какие уравнениями Лагранжа первого рода?
9. В чем состоит основная (обратная) задача динамики механической системы, движение которой описывается обобщенными координатами?
10. Чему равно число уравнений Лагранжа второго рода для конкретной механической системы?
11. Для каких механических систем применять уравнения Лагранжа второго рода предпочтительнее (по сравнению с применением общих теорем динамики)? В чем состоят их преимущества?
12. Функцией каких аргументов нужно представить кинетическую энергию системы при составлении уравнений Лагранжа второго рода?
13. В какой последовательности вы будете решать задачи на применение уравнений Лагранжа второго рода?
14. Как преобразуются уравнения Лагранжа второго рода в случае консервативных систем? Какую функцию называют функцией Лагранжа?

Упражнения

У3.1. Применяя принцип Даламбера – Лагранжа, определить ускорение кузова тележки, если к ней приложена горизонтальная сила \mathbf{F} . Масса кузова тележки m_1 , масса каждого из ее четырех колес m_2 . Колеса считать сплошными однородными дисками радиуса r , катящимися без проскальзывания по горизонтальным рельсам.

У3.2. Составить уравнение Лагранжа второго рода движения маятника, состоящего из груза A массы m , подвешенного

на нити, намотанной на неподвижный барабан радиуса R . Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l . За обобщенную координату принять угол φ отклонения маятника от вертикали.

У3.3. Груз A массой m скользит по гладкой боковой грани треугольной призмы B массой M , образующей угол α с гладкой горизонтальной плоскостью. Определить ускорение призмы B . Решите это упражнение двумя способами – используя уравнения Лагранжа второго рода и используя методы классической механики.

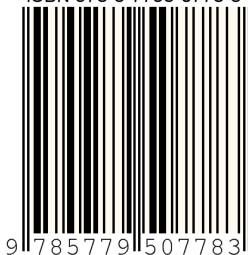
Учебное издание

Юдин Владимир Алексеевич

ЛЕКЦИИ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0778-3



Темплан 2016 г.

Редактор А.В. Тренина

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.

Подписано к печати 22.06.2016. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$ д.л.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.

Объем 2,5 уч.-изд.л.; 4,75 п.л. Тираж 200 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии
НГАСУ (Сибстрин)