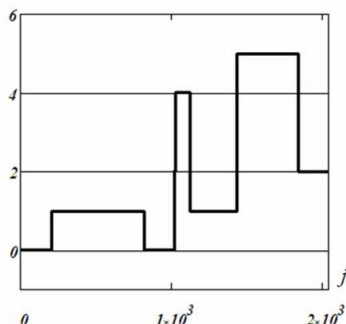
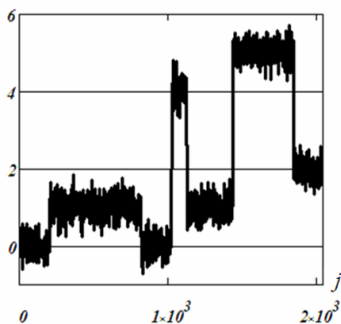


Ю.Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ (с примерами в пакете MathCAD)



НОВОСИБИРСК 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Ю.Е. Воскобойников

**ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ
СИГНАЛОВ
И ИЗОБРАЖЕНИЙ
(с примерами
в пакете MathCAD)**

Монография

НОВОСИБИРСК 2015

УДК 519.2
ББК В172
В 762

Воскобойников Ю. Е.

Вейвлет-фильтрации сигналов и изображений (с примерами в пакете MathCAD) / Ю. Е. Воскобойников ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2015. – 188 с.

ISBN 978-5-7795-0755-4

Монография содержит изложение теории и практики алгоритмов вейвлет-фильтрации, в которых обработке подлежат коэффициенты разложения зашумленного сигнала или изображения по вейвлет-базису. При этом большое внимание уделяется выбору параметров алгоритмов, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации. Приводятся фрагменты документов математического пакета MathCAD, реализующие построенные алгоритмы фильтрации.

Результаты монографии будут полезны широкому кругу читателей: магистрантам, аспирантам, научным сотрудникам, всем кто сталкивается с необходимостью цифровой фильтрации сигналов или изображений.

Печатается по решению научно-технического совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- М.С. Сопна, д-р физ.-мат. наук, профессор
НГАСУ (Сибстрин);
- А.А. Воевода, д-р техн. наук, профессор НГТУ

ISBN 978-5-7795-0755-4

© Воскобойников Ю.Е., 2015

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	7
Глава 1. ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	10
1.1. Непрерывное вейвлет-преобразование.....	10
1.2. Масштабирующие функций и вейвлеты.....	22
1.3. Кратномасштабное вейвлет-представление сигналов.....	39
1.4. Кратномасштабное вейвлет-представление изображений.....	47
Глава 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ.....	54
2.1. Кратномасштабное представление и задачи фильтрации сигналов и изображений.....	54
2.2. Оптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации.....	66
2.3. Квазиоптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал».....	70
2.4. Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации.....	79
Глава 3. ПОРОГОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ.....	90
3.1. Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации.....	90
3.2. Выбор параметра пороговой функции.....	98
3.3. Выбор пороговых значений на основе критерия оптимальности.....	111

3.4. Выбор параметров двухпараметрических пороговых функций	127
3.5. Выбор параметров трехпараметрических пороговых функций	140
Глава 4. ЧТО ЛУЧШЕ: ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЛИ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ	154
4.1. Алгоритмы пространственной фильтрации	154
4.2. Сравнение двух классов алгоритмов фильтрации	164
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	173
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	174
ПРИЛОЖЕНИЕ. МОДУЛИ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ	181

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние десятилетия теория и методы цифровой фильтрации сигналов и изображений получили новое развитие. Это обусловлено как появлением новых математических методов, таких как дискретное вейвлет-преобразование, позволяющих создать эффективные алгоритмы фильтрации, так и возросшими требованиями к точности фильтрации, особенно в случае обработки контрастных сигналов и изображений. При этом фильтрация в большинстве случаев является не конечным этапом обработки (для улучшения визуального восприятия), а некоторой предобработкой, например, для последующего распознавания образов.

Исходными данными для цифровой фильтрации являются отсчеты (значения) «точного» сигнала или изображения, которые зашумлены (искажены) случайным шумом (погрешностью) различной природы. Фильтрация заключается в построении алгоритма фильтрации (вычислительной процедуры), которая позволила бы достигнуть наилучших результатов в удалении шума из исходного (зашумленного) изображения.

Построение алгоритма фильтрации опирается на использование вероятностных моделей сигнала или изображения и шума, а также на применение различных статистических критериев оптимальности. Все это порождает многообразие методов и алгоритмов фильтрации.

Очевидно, что в одной монографии невозможно подробно рассмотреть все существующие алгоритмы цифровой фильтрации. Поэтому в этой книге будут рассмотрены только *частотные алгоритмы вейвлет-фильтрации*, в которых обработке подлежат коэффициенты разложения зашумленного сигнала по вейвлет-базису. Эти алгоритмы достаточно эффективны с точки зрения удаления шума, не требуют такой априорной информации, которая часто отсутствует на практике. При этом большое внимание *уделяется выбору параметров алгоритма, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации.*

Такой подбор материала в определенной степени отражает «личные научные интересы» автора и направления его научных исследований. Это обусловлено оригинальностью большинства из излагаемых результатов, особенно это касается алгоритмов оценивания оптимальных параметров сглаживания и оценивания оптимальных коэффициентов вейвлет-разложений.

Отличительной чертой монографии является то, что для многих алгоритмов *приводится программная реализация в системе компьютерной математики MathCAD*. Это позволит читателю использовать подходящий (для фильтрации его сигнала или изображения) алгоритм непосредственно, т.е. «с листа».

При изложении материала используется следующая последовательность: первоначально строится алгоритм для фильтрации одномерного дискретного сигнала (или просто сигнала), а затем результаты обобщаются на фильтрацию двумерного сигнала (далее просто изображения).

Автор надеется, что материал монографии будет полезен широкому кругу читателей: магистрантам, аспирантам, научным сотрудникам, всем кто сталкивается с необходимостью цифровой фильтрации сигналов или изображений.

ВВЕДЕНИЕ

Объектами цифровой фильтрации, рассматриваемыми в монографии, являются *одномерные и двумерные дискретные сигналы*.

Предположим, что наблюдаемое (измеренное) значение \tilde{f}_i одномерного дискретного сигнала описывается аддитивной

$$\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1,$$

или мультипликативной моделью

$$\tilde{f}_i = f(x_i) \cdot \eta_i, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1,$$

где $f(x)$ – некоторая функция (сигнал), измеряемая в точках (узлах) x_i со *случайным шумом* (погрешностью) η_i .

Аналогично для двумерного дискретного сигнала имеем аддитивную

$$\tilde{f}_{i,j} = f(x_i, y_j) + \eta_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad 0 \leq j \leq N_y - 1,$$

или мультипликативную модель

$$\tilde{f}_{i,j} = f(x_i, y_j) \cdot \eta_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad 0 \leq j \leq N_y - 1,$$

где $f(x, y)$ – функция двух переменных (изображение), измеряемая в узлах (x_i, y_j) со *случайным шумом* $\eta_{i,j}$.

В дальнейшем для упрощения изложения как одномерный, так и двумерный дискретный сигнал будет называться просто *сигналом* (если это не вызывает путаницы).

Физическая природа шума измерений может быть различной:

- шумы измерительной (регистрирующей) аппаратуры;
- помехи при передаче по каналам связи (особенно аналоговым);
- плохие условия съемки изображения и т.д.

В качестве наиболее распространенных статистических моделей шумов используются следующие:

- *белый шум* – случайный сигнал, отсчеты которого не коррелируются друг с другом, и его разновидность – *белый гауссовский шум*, отсчеты которого подчиняются гауссовскому (нормальному) распределению;

- *импульсный шум* – изолированные точки, случайные значения шума в которых существенно отличаются от значений сигнала в окружающих точках;

- шум вида «*соль и перец*», представляющий смесь белого и импульсного шумов. Такая модель достаточно часто используется при фильтрации изображений.

Очевидно, что фильтрация используется для того, чтобы в максимальной степени удалить шумы из исходного сигнала, внося при этом минимальные искажения значений «точного» сигнала. Таким образом, фильтрация заключается в построении алгоритма фильтрации (вычислительной процедуры), которая позволила достигнуть наилучших (с точки зрения принятого критерия) результатов в удалении шума из зашумленного сигнала.

Построение алгоритмов фильтрации существенно опирается на вероятностные модели сигнала и шума измерения и зависит от используемого критерия оптимальности, который позволяет оценить оптимальность того или иного алгоритма. Все это обуславливает многообразие методов и алгоритмов, используемых для обработки сигналов.

По методу обработки исходных значений \tilde{f}_i (или $\tilde{f}_{i,j}$) можно выделить:

- *алгоритмы фильтрации в пространственной области* (пространственная фильтрация);

- *алгоритмы фильтрации в частотной области* (частотная фильтрация).

Здесь термин «частотная область» подразумевает не только область значений частот в преобразовании Фурье, но и область значений переменных, являющихся параметрами некоторого

дискретного (как правило, ортогонального) преобразования (например, параметры вейвлет-преобразования).

Результатом работы алгоритмов пространственной фильтрации является значение, получаемое обработкой непосредственно исходных зашумленных значений сигнала, попавших в апертуру фильтра и число этих значений существенно меньше общего числа значений обрабатываемого сигнала.

Результатом работы алгоритмов частотной фильтрации является дискретный сигнал, определяемый обратным дискретным преобразованием коэффициентов, которые получены в результате обработки (фильтрации) коэффициентов прямого дискретного преобразования всего исходного зашумленного сигнала.

В данной монографии будет рассмотрен один класс алгоритмов фильтрации в частотной области, в которых обрабатываются коэффициенты разложения зашумленного сигнала по вейвлет-базису. При этом большое внимание уделяется выбору параметров алгоритма, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации.

Заметим, что в литературе наряду с термином «фильтрация» используется термин «сглаживание». Эти термины используются в сочетании «фильтрация шумов» и «сглаживание данных» (или «сглаживание функции»). Последнее сочетание применяется в случаях, когда по зашумленным измерениям некоторой функции необходимо ее восстановить, т.е. построить оценку $\hat{f}(x)$ для функции $f(x)$. Это в полной мере относится к задачам построения регрессий по пространственной выборке конечного размера. В монографии эти термины будут использоваться *на равных условиях*.

При фильтрации сигналов исследователь первоначально сталкивается с *проблемой выбора алгоритма фильтрации*, а затем – с *проблемой выбора параметров взятого алгоритма*, которые бы обеспечили успешную работу алгоритма. Надеемся, что содержание последующих глав монографии будет способствовать успешному решению этих проблем.

Глава 1. ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

В этой главе будут рассмотрены непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования, многомасштабное преобразование сигналов и изображений, а также реализация этих преобразований в пакете MathCAD. Все эти конструкции потребуются для построения эффективных алгоритмов фильтрации в последующих главах монографии.

1.1. Непрерывное вейвлет-преобразование

Определены основные понятия вейвлет-функций, а также рассмотрено непрерывное вейвлет-преобразование сигналов.

1.1.1. Недостатки Фурье-преобразования

Интегральное преобразование Фурье и ряды Фурье являются основой гармонического анализа непрерывных сигналов. Напомним, что непрерывным преобразованием Фурье (НПФ) (в зарубежной литературе – непрерывно-временным преобразованием Фурье) называется пара интегральных преобразований:

- прямое преобразование $F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i v x} dx$; (1.1.1)

- обратное преобразование $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{2\pi i v x} dv$, (1.1.2)

где $i = \sqrt{-1}$; v – частота, Гц.

Для существования НПФ необходима принадлежность $f(x)$ пространству абсолютно интегрируемых функций $L_1[R]$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

или принадлежность пространству $L_2 [R]$ – выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

С позиции анализа произвольных функций в частотной области и точного восстановления этих функций следует отметить недостатки преобразования Фурье, которые привели к появлению оконного преобразования Фурье и стимулировали развитие вейвлет-преобразований.

Основные из них:

- ограниченное применение при гармоническом анализе нестационарных сигналов и невозможность анализа их особенностей (разрывов, ступенек, пиков и т.д.), так как в частотной области эти особенности «размазываются» по всему частотному диапазону спектра;

- синусоидальные волны $\exp(ix)$ не способны отображать сигналы с «бесконечной» крутизной (прямоугольные импульсы), так как для этого требуется бесконечно большое число членов ряда Фурье. При ограничении числа членов ряда в окрестности скачков и разрывов возникают гармонические колебания (явление Гиббса);

- преобразование Фурье не дает представление о локальных свойствах сигнала при быстрых изменениях его спектра во времени, и оно не может анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

1.1.2. Оконное преобразование Фурье

Частичным выходом из этой ситуации является оконное преобразование Фурье с движущейся по сигналу оконной функцией, имеющей компактный носитель. Временной интервал сигнала при большой его длительности разделяется на подинтервалы, и преобразование Фурье выполняется последовательно для каждого подинтервала в отдельности. Тем самым осуществляется переход к частотно-временному (частотно-координатному) представлению сигналов, при этом в пределах каждого

подинтервала сигнал «считается» стационарным. Результатом оконного преобразования является семейство спектров, которым отображается изменение спектра сигнала по интервалам сдвига окна преобразования. Если на каком-то из подинтервалов присутствуют частотные составляющие анализируемого сигнала, то они будут присутствовать в вычисленном спектре. Это в какой-то мере позволяет выделять на координатной оси и анализировать особенности нестационарных сигналов. Размер носителя оконной функции $w(x)$ обычно устанавливается соизмеримым с интервалом стационарности сигнала. По существу, таким преобразованием один нелокализованный базис разбивается на определенное количество базисов, локализованных в пределах функции $w(x)$, что позволяет представлять результат преобразования в виде функции двух переменных – частоты и временного положения окна. При этом размер стационарности сигнала необходимо знать априори.

Оконное преобразование выполняется в соответствии с выражением

$$F(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x-b)e^{-i\omega x} dx. \quad (1.1.3)$$

Функция $w(x-b)$ представляет собой функцию (в общем случае комплексную) окна сдвига преобразования по координате x , где параметром b задаются фиксированные значения сдвига. При сдвиге окон с равномерным шагом значения b_k определяются выражением $b_k = k\Delta_b$. В качестве окна преобразования используются как простейшее прямоугольное окно ($w(x)=1$ в пределах окна и 0 за его границами), так и специальные весовые окна (Бартлетта, Гаусса, Кайзера и пр.), обеспечивающие малые искажения спектра за счет граничных условий вырезки оконных отрезков сигналов и нейтрализующие явление Гиббса. При этом для каждого положения окна на временной оси сигнала вычисляется свой комплексный спектр. Эффективная

ширина оконной функции сохраняется постоянной по всему интервалу сигнала.

Заметим, что базисные функции преобразования Фурье ($\exp(i\omega x)$) локализованы в частотной области (при $T \rightarrow \infty$ имеем δ – функции в частотной области) и совсем не локализованы во временной (так как определены в интервале от $-\infty$ до ∞). Как видно из оконного преобразования Фурье для детального спектрального (а точнее спектрально-временного) анализа сигнала необходимо иметь базисные функции, которые имели бы локализацию как в частотной, так и во временной области. Такими свойствами обладают *вейвлет-функции*.

1.1.3. Прямое непрерывное вейвлет-преобразование и вейвлет-анализ сигналов

Термин «вейвлет» (*wavelet*) в переводе с английского означает «маленькая (короткая) волна». Вейвлеты – это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, *которые локальны во времени и по частоте*, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени. Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте. Как правило, вейвлет-преобразования подразделяют на *непрерывное (CWT) и дискретное (DWT)*.

Допустим, что функция $f(x)$ определена на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и принадлежит пространству $L_2(R)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Непрерывным вейвлет-преобразованием (CWT) функции $f(x) \in L_2(R)$ называют функцию двух переменных [1, 30, 31]:

$$C(a,b) = \langle f(x)\psi(a,b,x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(a,b,x)dx, \quad (1.1.4)$$

$$a,b \in R, a \neq 0,$$

где вейвлеты $\psi(a, b, x) \equiv \psi_{ab}(x)$ – масштабированные и сдвинутые копии порождающего вейвлета $\psi(x) \in L_2(R)$, совокупность которых создает новый базис пространства $L_2(R)$. Вейвлет-функция $\psi(x)$ имеет нулевое значение интеграла, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ и Фурье-образ, обозначаемый как $\Psi(\omega)$.

Порождающими функциями могут быть самые различные функции с компактным носителем – ограниченные по времени и местоположению на временной оси и имеющие спектральный образ, в определенной степени локализованный на частотной оси. Как и для преобразования Фурье, базис пространства $L_2(R)$ целесообразно конструировать из одной порождающей функции, норма которой должна быть равна 1. Для перекрытия локальной функцией вейвлета всей временной оси пространства используется операция сдвига (смещения по временной оси): $\psi(b, x) \equiv \psi(x - b)$, где значение b для НВП также является величиной непрерывной. Для перекрытия всего частотного диапазона пространства $L_2(R)$ используется операция временного масштабирования вейвлета с непрерывным изменением независимой переменной: $\psi(a, x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x}{a}\right)$. Если временной образ вейвлета будет расширяться (увеличением значения параметра « a »), то его «средняя частота» будет понижаться, а частотный образ (частотная локализация) перемещаться на более низкие частоты. Таким образом, путем сдвига по независимой переменной $(x - b)$ вейвлет имеет возможность перемещаться по всей числовой оси произвольного сигнала, а путем изменения масштабной переменной « a » (в фиксированной точке $(x - b)$ временной оси) «просматривать» частотный спектр сигнала по определенному интервалу окрестностей этой точки.

С использованием этих операций вейвлетный базис функционального пространства образуется путем масштабных преобразований и сдвигов порождающего вейвлета $\psi(x) \in L_2(R)$:

$$\psi(a, b, x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right); \quad a, b \in R; \quad a \neq 0. \quad (1.1.5)$$

Нетрудно убедиться, что нормы вейвлетов $\psi(a, b, x)$ равны норме $\psi(x)$, что обеспечивает нормировочный множитель $|a|^{-1/2}$. При нормировке к 1 порождающего вейвлета $\psi(x)$ все семейство вейвлетов также будет нормированным. Если при этом выполняется требование ортогональности функций, то функции $\psi(a, b, x)$ будут представлять собой ортонормированный базис пространства $L_2(R)$.

В табл. 1.1 приведены выражения, определяющие часто используемые вейвлеты.

Таблица 1.1

Название вейвлета	Определение вейвлета
НААР-вейвлет	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2; \\ -1, & 1/2 \leq x \leq 1; \\ 0, & x < 0, \quad x \geq 1 \end{cases}$
ФНАТ-вейвлет («французская шляпа» – French hat)	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1/3; \\ -1/2, & 1/3 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$
МНАТ-вейвлет («мексиканская шляпа» – Mexican hat)	$\psi(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Пример 1.1.1. На рис. 1.1 показаны графики МНАТ-вейвлета при разных значениях параметров масштаба a и параметре сдвига $b=0$. Сплошная кривая (номер 1) соответствует $a=1$, точечная кривая (номер 2) – $a=2$. Видно, что малые значения масштаба a «сжимают» вейвлет-функцию (частотный диапазон ее Фурье-образа расширяется (см. рис. 1.1 б)), большие значения параметра – «расширяют» вейвлет-функцию (частотный диапазон сжимается). ●

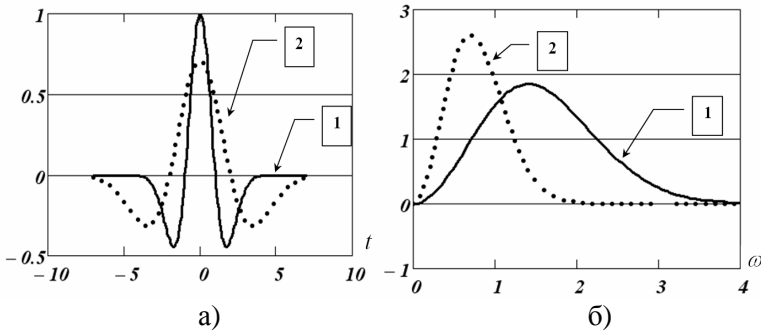


Рис. 1.1. Вейвлеты и их Фурье-образы

Вернемся к непрерывному вейвлет-преобразованию (1.1.4). Функция $S(a, b)$ несет информацию о частотно-временной структуре функции $f(x)$. Действительно, задавая малые значения масштаба a , получаем информацию об особенностях сигнала $f(x)$, которые имеют малую протяженность, большие значения a позволяют выявить «глобальную» информацию о сигнале (которая распределена по всему сигналу). Эта закономерность хорошо иллюстрируется рис. 1.2. Данную закономерность можно назвать *отношением неопределенности* для вейвлет-функций, а именно: хорошее разрешение по частоте (маленькая ширина Фурье-образа вейвлет-функции), обуславливает плохое разрешение по времени (большая ширина вейвлет-функции) и наоборот.

Заметим, что для детализации самых высоких частот сигнала минимальный размер окна вейвлета не должен превышать периода самой высокочастотной гармоники. Если в сигнале присутствуют спектральные компоненты, соответствующие текущему значению a , то интеграл произведения вейвлета с сигналом в интервале, где эта спектральная компонента присутствует, дает относительно большое значение. В противном случае – произведение мало или равно нулю. С увеличением масштаба (ширины окна) вейвлета преобразование выделяет все более низкие частоты.

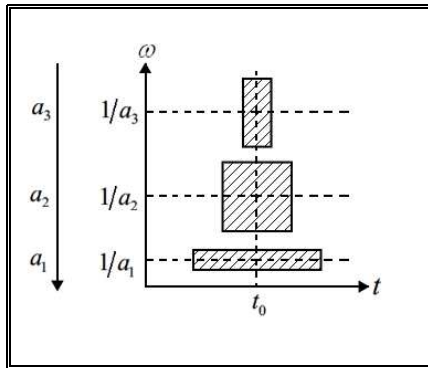


Рис. 1.2. Временное и частотное разрешение вейвлет-функций

Чисто гармоническим сигналам (функции $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$) соответствуют яркие горизонтальные полосы, где модуль коэффициента $C(a, b)$ велик. Локальные особенности (нарушение гладкости сигнала) определяют вертикальные полосы, при этом пикам соответствует сгущение светлых областей, впадинам – сгущение темных областей. Чем резче выражена особенность сигнала, тем сильнее она отражается в функции $C(a, b)$ и тем выше значения этой функции. *Вейвлет-спектр*

$C(a, b)$ отчетливо выделяет тонкие особенности сигнала, такие как небольшие разрывы, изменение знаков первой и второй производных, изменение частоты составляющих сигнала во времени и т.д.

Проведенные рассуждения позволяют говорить о новом способе изучения сигналов, а именно – *вейвлет-анализе, основанном на изучении особенностей вейвлет-спектра $C(a, b)$* .

При практическом использовании непрерывного вейвлет-преобразования необходимо учитывать [29, 30]:

- для вейвлетов с компактным носителем нет необходимости вычислять интегралы с бесконечными пределами, так как диапазон изменения сдвига b ограничен;
- для графического анализа вейвлет-спектра $C(a, b)$ или его табличного представления значения параметров преобразования a , b задаются дискретно (чаще всего по закону арифметической прогрессии).

Каждый вейвлет $\psi(x)$ имеет определенную «ширину» своего временного окна, которому соответствует определенная «средняя» частота Фурье-образа (или спектра) вейвлета, обратная его масштабному коэффициенту a . Так, малые значения параметра a , характеризующие быстрые составляющие в сигналах, соответствуют высоким частотам, а большие значения (соответствующие медленным изменениям сигнала) – низким частотам. Таким образом, за счет изменения масштаба вейвлеты способны выявлять различия на разных частотах, а за счет сдвига (параметр b) – проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем исследуемом временном интервале. В какой-то мере можно говорить о том, что вейвлет-преобразование адаптировано для выявления и низкочастотных, и высокочастотных характеристик сигналов (подробнее см. [30, 31, 33]).

Вывод: *вейвлет-анализ сигналов, т.е. изучение функции $C(a, b)$, открывает принципиально новые возможности (по сравнению с Фурье-анализом) в исследовании тонких особенностей сигнала.*

1.1.4. Обратное непрерывное вейвлет-преобразование

Так как форма базисных функций $\psi(a, b, x)$ зафиксирована, то вся информация о сигнале переносится на значения функции $C(a, b)$. Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета. Теоретически строго вейвлет может считаться базисной функцией $L_2(R)$ только в случае его ортонормированности. Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$f(x) = (1/C_\psi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1/a^2) C(a, b) \psi(a, b, x) da db, \quad (1.1.6)$$

где C_ψ – нормализующий коэффициент, определяемый выражением

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (|\Psi(\omega)|^2 / \omega) d\omega < \infty, \quad (1.1.7)$$

где $\Psi(\omega)$ – Фурье-образ $\psi(t)$.

Условие конечности C_ψ ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве вейвлетов. В частности, при $\omega=0$ для обеспечения сходимости интеграла (1.1.6) значение $\Psi(\omega)$ должно быть равно нулю. Это обеспечивает условие компактности Фурье-образа вейвлета в спектральной области с локализацией вокруг некоторой частоты ω_0 (средней частоте вейвлетной функции). Следовательно, функция $\psi(x)$ должна иметь нулевое среднее значение по области его определения (интеграл функции по аргументу должен быть нулевым):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (1.1.8)$$

Однако это означает, что не для всех сигналов возможна их точная реконструкция вейвлетом $\psi(x)$, так как при нулевом первом моменте вейвлета коэффициент передачи постоянной составляющей сигнала в преобразовании (1.1.6) равен нулю. Условия точной реконструкции сигналов будут рассмотрены при описании кратномасштабного анализа.

Возникает вопрос: можно ли вейвлет-преобразование использовать для фильтрации зашумленных сигналов? В принципе ответ на этот вопрос положителен, но на практике возникают определенные трудности. Действительно, шум измерения имеет широкий спектр и определяет значения $C(a, b)$ при малых величинах параметра a . Поэтому, умножая $C(a, b)$ на некоторый фильтрующий множитель $W(a)$, который при малых a меньше 1, а затем, взяв обратное вейвлет-преобразование (1.1.6), можно уменьшить уровень шума. Однако возникают трудности:

- определение оптимального фильтрующего множителя, который бы минимизировал ошибку фильтрации;
- построение эффективной вычислительной процедуры для преобразований (1.1.4), (1.1.6), так как вычисление интегралов требует существенных затрат машинного времени.

Поэтому в настоящее время непрерывное преобразование (1.1.4) используется для анализа сигналов, а фильтрацию зашумленных сигналов осуществляют на основе дискретного вейвлет-преобразования, которое рассматривается далее.

1.1.5. Диадное вейвлет-преобразование непрерывных сигналов

Ранее отмечалось, что непрерывное вейвлет-преобразование требует больших вычислительных затрат и вычисляет избыточное число коэффициентов, которое не требуется для реконструкции (восстановления) сигнала.

Для преодоления этих недостатков следует задавать дискретные значения параметров a, b следующими соотношениями [29, 30]:

$$a = 2^j ; b = k2^j , \quad (1.1.9)$$

где целые переменные j, k принимают значения из множества целых чисел $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, т.е. $j, k \in Z$. Параметр j в дальнейшем будем называть параметром масштаба, а параметр k – параметром сдвига. Подобная дискретизация a, b является наиболее распространенной, сетка дискретизации называется *диадистической*, а само вейвлет-преобразование часто называют *диадным*.

Выделение диадного преобразования в отдельный класс оправдано тем, что и непрерывное вейвлет-преобразование на практике вычисляется также для дискретных значений параметров a, b . Характер их дискретизации чаще всего определяется арифметической прогрессии с «перекрытием» носителей вейвлет-функций. Диадное вейвлет-преобразование исключает подобное «перекрытие».

Базисом пространства $L_2(R)$ являются функции

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad j, k \in Z. \quad (1.1.10)$$

Тогда *прямое дискретное вейвлет-преобразование* сводится к вычислению коэффициентов

$$d_{j,k} = C(j, k) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}x - k) f(x) dx, \quad (1.1.11)$$

которые будем называть *детализирующими*. *Обратное дискретное вейвлет-преобразование* для непрерывных сигналов задается выражением

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} d_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k). \quad (1.1.12)$$

В пакете MathCAD нормировка базисных функций выполнена таким образом, что $C_\psi = 1$.

Преобразования (1.1.11), (1.1.12) означают, что любая функция $f(x) \in L_2(R)$ может быть представлена рядом

$$f = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (1.1.13)$$

при условии, что множество функций $\{\psi_{j,k}\}$ образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j', k = k'; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Запись $\langle f, \psi \rangle$ означает скалярное произведение в $L_2(R)$, т.е.

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(x) dx. \quad (1.1.15)$$

Доказано, что для ортогональных вейвлетов возможно точное восстановление сигнала после прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования только с использованием дополнительной аппроксимации с помощью функции $\varphi(x)$, называемой *отцовским вейвлетом* [1, 29, 31]. При этом сам вейвлет $\psi(x)$ называют *материнским*. Далее рассматривается представление любой функции $f(x) \in L_2(R)$ в базисе, образованном из функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ с помощью операций сдвига и масштабирования. Такое представление получило название *кратномасштабное*.

1.2. Масштабирующие функций и вейвлеты

Рассмотрены масштабирующие функции и вейвлеты, которые являются ортогональными базисами в пространстве $L_2(R)$. С помощью этих функций реализуется плодотворная идея суммирования «грубой» аппроксимации сигнала с детализирующими локальными особенностями сигнала. Эта идея оказалась осо-

бенно эффективной, когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и протяженные низкочастотные компоненты. Эффективность определяется также возможностью каскадного вычисления коэффициентов представления, алгоритм которого подобен быстрому преобразованию Фурье [1, 29, 30, 33].

*1.2.1. Масштабирующие подпространства
и масштабирующая функция*

Возьмем некоторую функцию $\varphi(x)$, целочисленные сдвиги которой

$$\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n); n \in Z \quad (1.2.1)$$

образуют ортонормированный базис подпространства V_0 , которое порождено линейными комбинациями функций $\varphi_{0,n}$. Напомним, что система функций $\{\varphi_{0,n}(x)\}, n \in Z$ называется ортонормированной, если

$$\langle \varphi_{0,n}, \varphi_{0,m} \rangle = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Далее рассмотрим систему функций

$$\varphi_{-1,n} = \sqrt{2} \cdot \varphi(2x - n), n \in Z,$$

которая получена из функции $\varphi(2x)$ сдвигами на $n/2$. Подпространство V_{-1} порождается линейными комбинациями $\varphi_{-1,n}(x)$ и система функций $\{\varphi_{-1,n}(x)\}$ образует ортонормированный базис пространства V_{-1} . Продолжая процедуру масштабирования и сдвига, для любого $j \in Z$ образуем систему функций

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - n), \quad (1.2.3)$$

при этом j принимает как отрицательные, так и положительные значения. Пространства, порожденные функциями $\{\varphi_{j,n}(x)\}$, обозначим как V_j . Имеют место следующие вложения:

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \subset V_{-j} \subset \dots \quad (1.2.4)$$

Очевидно, что

$$\overline{\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = \{0\}; \quad \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L_2(R), \quad (1.2.5)$$

где горизонтальная черта сверху означает замыкание пространства.

Таким образом, построена последовательность масштабирующих пространств V_j , базисами которых являются системы функций $\{\varphi_{j,n}(x), n \in Z\}$.

Пример 1.2.1. Приняв в качестве функции $\varphi(x)$ прямоугольную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1]; \\ 0, & \text{для других } x, \end{cases}$$

построить ортонормированный базис в $L_2(R)$ (называемый базисом Хаара).

Решение. Образует систему функций $\{\varphi_{0,n}(x)\}$, которая является ортонормированным базисом в пространстве V_0 :

$$\langle \varphi_{0,n}, \varphi_{0,m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0,n}(x) \varphi_{0,m}(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Каждая функция $\{\varphi_{0,n}(x)\}$ отличается от нуля на отрезке $[n, n+1]$, который имеет единичную длину. Такой отрезок называется носителем функции $\{\varphi_{0,n}(x)\}$ и обозначается

$$\text{supp}(\varphi_{0,n}(x)) = [n, n+1].$$

Далее образуем систему функций $\varphi_{-1,n}(x)$ (см. выражение (1.2.3)) при $j = -1$. Нетрудно видеть, что $V_0 \subset V_{-1}$. Действительно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,1}(x) = \sum_n h_n \varphi_{-1,n}(x),$$

где $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, любой элемент пространства V_0 выражается в виде линейной комбинации элементов V_{-1} . Носитель функции $\varphi_{-1,n}(x)$ стал в два раза меньше и определяется как

$$\text{supp}(\varphi_{-1,n}(x)) = \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2} \right] = [2^{-1}n, 2^{-1}(n+1)].$$

По аналогии для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеем систему функций (1.2.3), носитель которых $\text{supp}(\varphi_{j,n}(x)) = [2^j n, 2^j(n+1)]$ и которая является базисом в пространстве V_j .

Таким образом, построены системы функций $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ и соответствующие пространства V_j , удовлетворяющие (1.2.5), что говорит о том, что системы $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

На рис. 1.3 изображены графики функций: $\varphi(x)$ (сплошная линия), $\varphi_{-1,3}(x) = \sqrt{2} \cdot \varphi(2x-3)$ (точечная линия), $\varphi_{-2,11}(x) = 2 \cdot \varphi(4x-11)$ (штриховая линия). Хорошо видно из-

менение ширины этих функций. Чем меньше номер j (параметр масштаба), тем более тонкие структуры сигнала можно представить в базисе $\{\varphi_{j,n}(x)\}$.

Приведенный пример показывает, что, задав соответствующим образом функцию $\varphi(x)$, можно построить масштабирующие пространства $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$. Далеко не каждая функция $\varphi(x)$ позволяет это сделать.

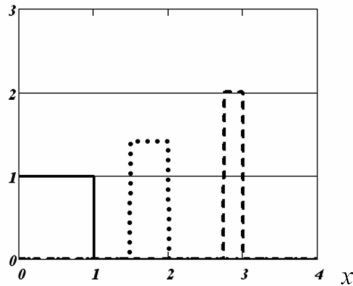


Рис. 1.3. Графики базисных функций Хаара

Функция $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ называется *масштабирующей* (т.е. порождает базис масштабирующих пространств), если она может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n), \quad (1.2.6)$$

где числа h_n удовлетворяют условию

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n| < \infty. \quad (1.2.7)$$

Возвращаясь к примеру 1.2.1, видим, что прямоугольная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (1.2.6), (1.2.7) и является масштабирующей. Подробно построение масштабирующих функций рассматривается в ряде публикаций (например [1, 29, 30]).

Дадим еще одно определение, полезное при построении алгоритмов фильтрации сигналов и изображений.

Ортогональным кратномасштабным разложением пространства $L_2(R)$ называется последовательность замкнутых вложенных друг в друга подпространств

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots,$$

обладающая свойствами (1.2.5), и сдвигами масштабирующей функции $\varphi(x) \in V_0$ образуют ортонормированный базис $\{\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n), n \in Z\}$ подпространства V_0 .

Из примера 1.2.1 видно, что функция $\varphi(x)$ образует ортонормированный базис подпространства V_0 , а порожденные функциями $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ подпространства V_j являются ортогональным кратномасштабным разложением пространства $L_2(R)$.

Значение коэффициентов h_n в представлении (1.2.6) для масштабирующей функции, порождающей ортогональное кратномасштабное разложение пространства $L_2(R)$, определяется из условия

$$h_n = \sqrt{2} \int \varphi(x) \varphi(2x-n) dt. \quad (1.2.8)$$

Дополнительно условие нормировки

$$\int \varphi(x) dx = 1 \quad (1.2.9)$$

обуславливает требование

$$\sum_n h_n^2 = 1. \quad (1.2.10)$$

В общем случае носитель функции $\varphi(x)$ может иметь произвольный размер с числом отсчетов N . Тогда масштабирующее уравнение (1.2.6) принимает вид:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \varphi(2x - n) \quad (1.2.11)$$

Забегая вперед, заметим, что функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую (1.2.11), часто называют (и это будет иметь место в дальнейшем) *отцовским вейвлетом*.

1.2.2. Операторы проектирования и подпространства вейвлетов

Для каждого $j \in Z$ рассмотрим оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(R)$ на подпространство V_j (будем обозначать $P_j(f): L_2(R) \rightarrow V_j$), который определим выражением

$$P_j(f) = \sum_{n \in Z} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \cdot \varphi_{j,n}. \quad (1.2.12)$$

Как следует из формул (1.2.11) и (1.2.12) проекции $P_j(f)$ являются приближениями функции $f(x)$ и точность этих приближений возрастает по мере уменьшения масштаба j .

Сравним два последовательных приближения. Для этого рассмотрим разность $P_{j-1}(f) - P_j(f)$, которая лежит в подпространстве V_{j-1} и ортогональна подпространству V_j , т.е. является ортогональным дополнением пространства V_j до пространства V_{j-1} . Таким образом, имеем ортогональное разложение

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad (1.2.13)$$

которому можно дать следующую трактовку: более точное приближение $P_{j-1}(f)$ в пространстве V_{j-1} получается как сумма

приближения $P_j(f)$ и дополнительного слагаемого $P_j^W(f)$, отражающего уточнение при переходе от $P_j(f)$ к $P_{j-1}(f)$.

Определим, какими функциями порождается пространство W_j . Поскольку все пространства V_j получены из V_0 изменением масштаба, то естественно сначала изучить пространство W_0 (ортогональное дополнение к V_0 в пространстве V_{-1}): $V_{-1} = V_0 + W_0$. Пусть функция $\psi(t) \in W_0$. Тогда она раскладывается по базису $\{\varphi_{-1,n}(x)\}$ пространства V_{-1} :

$$\psi(t) = \sum_{n \in Z} g_n \varphi_{-1,n}(t). \quad (1.2.14)$$

Поскольку функция $\psi(t)$ ортогональна V_0 , то для любого n имеем $\langle \psi, \varphi_{0,n} \rangle = 0$. Так как пространство V_0 входит в V_{-1} , то $\varphi_{0,n}(x)$ также раскладывается по базису $\{\varphi_{-1,n}(x)\}$:

$$\varphi_{0,n}(x) = \sum h_k \varphi_{-1,k}(x).$$

Таким образом, приходим к условию ортогональности:

$$\langle \psi, \varphi_{0,n} \rangle = \left\langle \sum_n g_n \varphi_{-1,n}(x), \sum_k h_k \varphi_{-1,k} \right\rangle = 0, \quad (1.2.15)$$

из которого при известных h_k можно вычислить коэффициенты g_n , входящие в (1.2.14). Как правило, уравнение (1.2.15) имеет несколько решений.

Если последовательность

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

образует ортогональное кратномасштабное разложение пространства $L_2(R)$, то для каждого $j \in Z$ ортогональное дополне-

ние W_j к подпространству V_j в подпространстве V_{j-1} называют *подпространством вейвлетов*, а его элементы – *вейвлетами*.

Подпространство вейвлетов обладает следующими свойствами [1, 29, 31]:

- они образуют ортогональное разложение $L_2(R) = \overline{\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k}$;
- существует функция $\psi(x) \in W_0$, называемая материнским вейвлетом, множество ее сдвигов $\psi(x-n)$ образуют ортонормированный базис пространства W_0 , а функции

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.16)$$

образуют ортонормированный базис подпространств W_j , $j \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.2.2. Для масштабирующей функции Хаара, определенной в примере 2.2.1, найти вейвлет $\psi(x)$.

Решение. В примере 1.2.1 показано, что $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,1}(x)$, что соответствует коэффициентам $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из условия ортогональности (1.2.15) следует уравнение

$$\langle \psi, \varphi_{0,n} \rangle = \left\langle \sum_k g_k \varphi_{-1,k}, \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,2n+1} \right\rangle = 0.$$

Так как $\{\varphi_{-1,n}\}$ – ортонормированный базис, то получаем уравнение

$$g_{2n} \frac{1}{\sqrt{2}} + g_{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad (1.2.17)$$

которое имеет множество решений. Возьмем простейшее решение:

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.2.18)$$

Этому решению соответствует функция

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,1}(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1), \\ \psi(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2); \\ -1, & x \in [1/2, 1); \\ 0 & x \notin [0, 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

которая называется вейвлетом Хаара. На рис 1.4 показан график вейвлета $\psi(x)$ (сплошная линия), а также его масштабируемых сдвигов $\sqrt{2}\psi(2x-3)$ (точечная линия), $2\psi(4x-11)$ (штриховая линия).

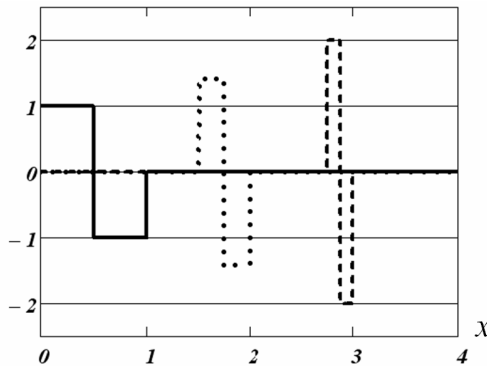


Рис. 1.4. Графики вейвлетов Хаара

Функции $\psi_{0,n} = \psi(x-n)$ образуют ортонормированный базис пространства W_0 , а функции $\psi_{j,n} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x-n)$ образуют ор-

тонормированный базис пространства W_j . Заметим, что носитель функции $\psi_{j,n}(x)$ имеет ту же длину, что и функция $\varphi_{j,n}(x)$, т.е.

$$\text{supp}(\psi_{j,n}(x)) = [2^j n, 2^j (n+1)].$$

На рис. 1.4 хорошо видно изменение ширины этих функций $\psi(x)$ (сплошная линия), $\psi_{-1,3}(x) = \sqrt{2} \cdot \psi(2x-3)$ (точечная линия), $\psi_{-2,11}(x) = 2 \cdot \psi(4x-11)$ (штриховая линия). Чем меньше номер j (параметр масштаба), тем более тонкие структуры сигнала можно представить в базисе $\{\psi_{j,n}(x)\}$.

В настоящее время разработаны около двух десятков различных вейвлетов, большая часть которых реализована в виде функций пакетов компьютерной математики.

Так, в пакете *Wavelet Toolbox 2.0/2.1* системы MatLAB представлены полтора десятка базовых типов вейвлетов и множество вариантов для некоторых базовых вейвлетов [33]. В системе MathCAD пакет *Wavelet Extension* содержит около десятка базовых типов вейвлетов [30].

Очевидно, что каждый тип вейвлетов имеет определенные свойства, которые надо учитывать при подборе подходящего типа вейвлета для решения конкретных задач обработки сигналов и изображений. В книге [30, с. 155–158] приведены основные типы вейвлетов и их свойства. Критический анализ этих свойств позволил выбрать для дальнейшей работы ортогональные вейвлеты с компактным носителем, к которым относятся:

- *вейвлеты Добеши;*
- *симлет-вейвлеты – вейвлеты Добеши с наименьшей асимметрией и компактным носителем;*
- *вейвлеты Койфлета.*

Их основные свойства:

- функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют компактный носитель;
- возможны непрерывные и дискретные преобразования с применением быстрых преобразований;
- обеспечивается принципиальная возможность реконструкции (восстановления) сигналов и изображений.

К недостаткам можно отнести:

- недостаточную периодичность;
- отсутствие в той или иной степени симметрии.

Приведем некоторые свойства ортогональных вейвлетов. Ранее приводились уравнения для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k); \quad (1.2.20)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k). \quad (1.2.21)$$

Из свойства ортогональности отцовского вейвлета $\varphi(x)$ следует уравнение

$$\sum_k h_k h_{k+2m} = \delta_m, \quad (1.2.22)$$

а из условий нормировки $\int \varphi(x) dx = 1$ вытекает второе уравнение

$$\sum h_k = \sqrt{2}. \quad (1.2.23)$$

Из ортогональности отцовских и материнских вейвлетов

$$\int \psi(x) \varphi(x - n) dx = 0 \quad (1.2.24)$$

следует уравнение

$$\sum_k h_k g_{k+2m} = 0, \quad (1.2.25)$$

решением которого является значение коэффициентов g_k :

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}, \quad (1.2.26)$$

где $2M$ – определяет число коэффициентов h_k .

Точность аппроксимации функции вейвлетами зависит от гладкости (регулярности) вейвлета, т.е. от дифференцируемости

вейвлета. Вейвлеты с более высокой регулярностью обеспечивают более качественное восстановление сигнала. Для обеспечения заданной гладкости до степени $M - 1$ вейвлеты должны быть ортогональны соответствующим полиномам, т.е.

$$\int \psi(x)x^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (1.2.27)$$

Из этого условия следует:

$$\sum_k k^m g_k = 0; \quad \sum_k (-1)^k k^m h_k = 0, \quad m = 0, \dots, M - 1. \quad (1.2.28)$$

Уравнения (1.2.25), (1.2.26), (1.2.27), (1.2.28) используются для расчетов коэффициентов h_k, g_k при конструировании вейвлетов. Примеры такого конструирования можно увидеть в публикациях [29, 30, 33].

Замечание 1.2.1. Как уже отмечалось в системе компьютерной математики MathCAD имеется пакет *Wavelet Extension*, включающий большой набор функций, осуществляющих вейвлет-преобразования с различными отцовскими и материнскими вейвлетами. Структура пакета и состав функций описаны в ряде книг и учебников (например [30]). Здесь будут рассмотрены только те функции пакета, которые связаны с ортогональными вейвлетами, имеющими компактные носители. ♦

1.2.3. Функции MathCAD, вычисляющие значения вейвлетов

Функции позволяют вычислить значения вейвлетов для заданного масштаба и сдвига. Эти функции полезны для визуализации вейвлетов.

Рассмотрим синтаксис следующих функций:

wavelet(x, j, k, m, s);

father($x, [j, k,]ss$);

mother($x, [j, k,]ss$).

Функция *wavelet* вычисляет значение в точке x отцовского вейвлета ($m=0$) или материнского вейвлета ($m=1$).

Функция *father* вычисляет значение в точке x отцовского вейвлета.

Функция *mother* вычисляет значение в точке x материнского вейвлета.

Формальные параметры этих функций:

- x – вещественная величина, в которой вычисляется значение вейвлета;
- j – целая величина, определяющая масштаб вейвлета;
- k – целая величина, определяющая сдвиг вейвлета;
- m – целая величина: $m=0$, вычисляется отцовский вейвлет $\varphi_{j,k}(x)$; $m=1$, вычисляется материнский вейвлет $\psi_{j,k}(x)$;

• s – переменная, задающая семейство вейвлетов с использованием следующих обозначений:

daublet(n) – n – коэффициентный вейвлет Добеши (n – четные числа от 2 до 20);

coiflet(n) – n – коэффициентный вейвлет Койфлета ($n \in [6, 12, 18, 24, 30]$);

symmlet(n) – n – коэффициентный вейвлет Добеши с наименьшей асимметрией и компактным носителем (n – четные числа от 4 до 20).

Например, $s := \text{daulet}(8)$.

• ss – строковая константа или переменная, которая может принимать следующие значения:

dn – вейвлет Добеши;

sn – вейвлет Добеши с наименьшей асимметрией (симлет-вейвлет);

cn (или *coif*) – вейвлет Койфлета.

Буква n обозначает число масштабных коэффициентов h_k соответствующего вейвлета.

Например, $ss := "coif12"$.

На рис. 1.5 показаны фрагменты документа MathCAD, в котором вычисляются с использованием функции *wavelet* значения вейвлетов Добеши с числом коэффициентов $m = 4$: отцовских $\varphi(x)$, $\varphi(x-1)$ и материнских $\psi(x)$, $\psi(x-1)$. В этом же документе приведены графики этих вейвлетов (для удобства отображения графики материнских вейвлетов сдвинуты вниз на величину 2). Принятая нумерация графиков: 1 – $\varphi(x)$; 2 – $\varphi(x-2)$; 3 – $\psi(x)$; 4 – $\psi(x-2)$.

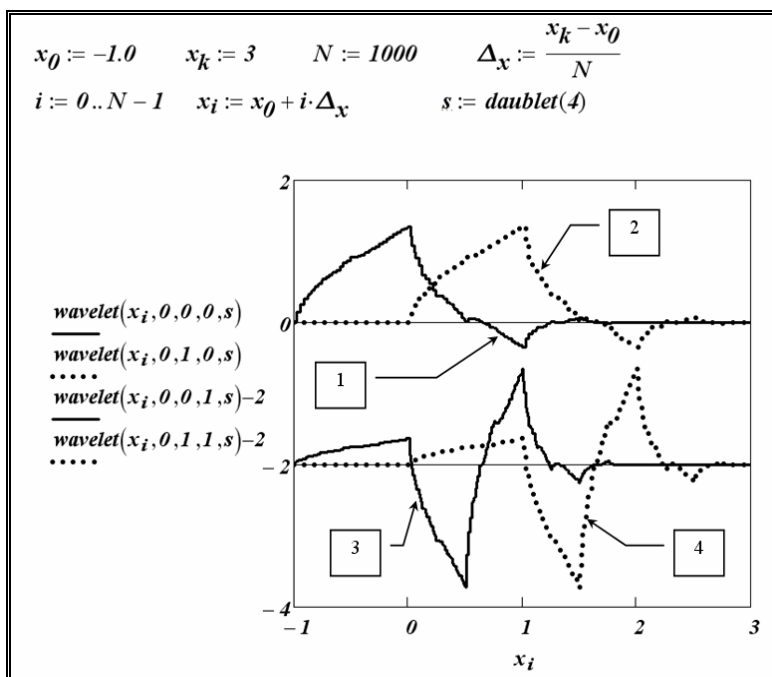


Рис. 1.5. Графики не масштабированных вейвлетов Добеши

В качестве иллюстрации эффекта масштабирования на рис. 1.6 приведены графики тех же вейвлетов Добеши, но масштабированных при $j = +1$, т.е. графики $\varphi(x/2)$, $\varphi(x/2-1)$, $\psi(x/2)$, $\psi(x/2-1)$. Видно, что масштабированные вейвлеты представляют собой «растянутые» версии исходных вейвлетов. При отрицательных значениях j происходит «сжатие» вейвлетов.

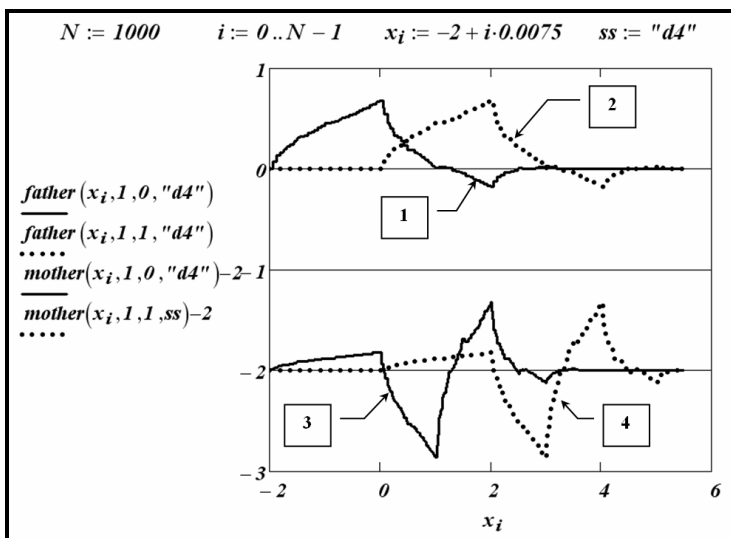


Рис. 1.6. Графики масштабированных вейвлетов Добеши

На рис. 1.7 показан фрагмент документа MathCAD, в котором приведены графики вейвлетов Койфлета $\varphi(x)$, $\varphi(x-1)$, $\psi(x)$, $\psi(x-1)$, вычисленных с использованием функций *mother*, *father*. Видно, что эти вейвлеты имеют заметную симметрию, которая отсутствовала у вейвлетов Добеши. Нумерация кривых та же, что и в предыдущих рисунках.

В пакете *Wavelet Extension* также включены функции, вычисляющие набор коэффициентов $\{h_n\}$, $n = 0, \dots, m-1$, входящие в масштабирующие уравнения (1.2.6). Обращение к функциям имеет вид:

daublet(m) – вычисляет m (четные числа от 6 до 20) коэффициентов вейвлета Добеши;

- *coiflet(m)* – вычисляет $m \in [6, 12, 18, 24, 30]$ коэффициентов вейвлета Койфлета;

- *symmlet(m)* – вычисляет m (четные целые значения от 4 до 20) вейвлета Добеши с наименьшей асимметрией.

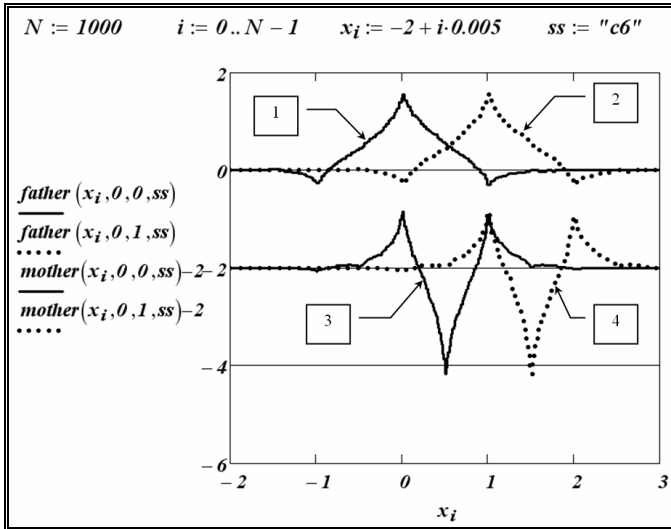


Рис. 1.7. Графики вейвлетов Койфлета

На рис. 1.8 показан фрагмент документа MathCAD, в котором вычисляются коэффициенты h_n для некоторых вейвлетов.

Далее будет рассмотрено представление функций $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ с использованием отцовских и материнских вейвлетов.

$$\begin{array}{l}
 \mathit{daublet}(4) = \begin{pmatrix} 0.483 \\ 0.837 \\ 0.224 \\ -0.129 \end{pmatrix} \quad \mathit{daublet}(6) = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.807 \\ 0.46 \\ -0.135 \\ -0.085 \\ 0.035 \end{pmatrix} \\
 \\
 \mathit{symmlet}(6) = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.807 \\ 0.46 \\ -0.135 \\ -0.085 \\ 0.035 \end{pmatrix} \quad \mathit{coiflet}(6) = \begin{pmatrix} -0.073 \\ 0.338 \\ 0.853 \\ 0.385 \\ -0.073 \\ -0.016 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 1.8. Вычисление коэффициентов вейвлетов

1.3. Кратномасштабное вейвлет-представление сигналов

Рассмотрено вейвлет-представление одномерных сигналов, которое в дальнейшем будет базовой конструкцией при построении алгоритмов фильтрации.

1.3.1. Вейвлет-представление сигналов

Возьмем некоторое значение параметра масштаба j_0 и рассмотрим соответствующее подпространство V_{j_0} . Оператор проектирования $P_{j_0}(f)$ на это пространство имеет вид:

$$P_{j_0}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j_0, n} \rangle \varphi_{j_0, n}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j_0, n} \varphi_{j_0, n}(x), \quad (1.3.1)$$

где $a_{j_0, n}$ – коэффициенты разложения функции $f(x)$ по ортонормированному базису пространства V_{j_0} . Обозначим набор этих коэффициентов через $A_0 = \{a_{j_0, n}\}$. Ранее было показано, что подпространство V_{j_0} можно разложить на сумму ортогональных подпространств $V_{j_0} = V_{j_0+1} \oplus W_{j_0+1}$ и вместо приближения $P_{j_0}(f)$ можно взять сумму

$$P_{j_0}(f) = P_{j_0+1}(f) + P_{j_0+1}^W(f). \quad (1.3.2)$$

Первое слагаемое есть более грубое приближение $f(x)$ в подпространстве V_{j_0+1} , а второе – отражает детали, которыми $P_{j_0+1}(f)$ отличается от $P_{j_0}(f)$. В базисах подпространств V_{j_0+1} , W_{j_0+1} имеет следующее представление:

$$P_{j_0}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j_0+1, k} \varphi_{j_0+1, k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j_0+1, k} \psi_{j_0+1, k}(x),$$

где $a_{j_0+1, k}$ – аппроксимирующие коэффициенты $(j_0 + 1)$ -го уровня:

$$a_{j_0+1, k} = \int f(x) \varphi_{j_0+1, k}(x) dx, \quad (1.3.3)$$

$d_{j_0+1, k}$ – детализирующие коэффициенты $(j_0 + 1)$ -го уровня:

$$d_{j_0+1, k} = \int f(x) \psi_{j_0+1, k}(x) dx. \quad (1.3.4)$$

Обозначим полученный набор коэффициентов $A_1 = \{a_{j_0+1, k}\}$, $D_1 = \{d_{j_0+1, k}\}$. Таким образом, получены два набора коэффициентов разложения. По способу вычисления коэффициенты A_1 , D_1 в совокупности дают ту же информацию, что и первоначальный набор A_0 представления (1.3.1). Однако особенность нового набора коэффициентов заключается в том, что коэффициенты

A_1 , определяющие разложение в подпространстве V_{j_0+1} , можно еще раз разложить на еще более сглаженную (аппроксимирующую) часть $P_{j_0+2}(f)$ и детализирующую часть $P_{j_0+2}^W(f)$, а именно:

$$\begin{aligned}
 P_{j_0}(f) &= P_{j_0+2}(f) + P_{j_0+2}^W(f) + P_{j_0+1}^W(f); \\
 P_{j_0}(f) &= \sum_{k \in N} a_{j_0+2,k} \varphi_{j_0+2,k}(x) + \sum_{k \in N} d_{j_0+2,k} \psi_{j_0+2,k}(x) + \\
 &+ \sum_{k \in N} d_{j_0+1,k} \psi_{j_0+1,k}(x).
 \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Таким образом, получены следующие наборы коэффициентов:

- $A_2 = \{a_{j_0+2,k}\}$ – аппроксимирующие коэффициенты глубины разложения 2;
- $D_2 = \{d_{j_0+2,k}\}$ – детализирующие коэффициенты глубины разложения 2;
- $D_1 = \{d_{j_0+1,k}\}$ – детализирующие коэффициенты глубиной разложения 1.

Повторяя процедуру J раз, получаем коэффициенты для J -го уровня разложения

$$\{A_J, D_J, D_{J-1}, D_{J-2}, \dots, D_1\}. \tag{1.3.6}$$

В дальнейшем *вейвлет-преобразованием* будем называть процедуру вычисления коэффициентов (1.3.6).

Вейвлет-представлением (или *вейвлет-разложением*) функции $f(x)$ с глубиной разложения J будем называть запись:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k \in Z} a_{j_0+J,k} \varphi_{j_0+J,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^J \sum_{k \in N} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \tag{1.3.7}$$

Обозначение $\hat{f}(x)$ указывает, что функция $\hat{f}(x)$ вычислена по коэффициентам разложения исходной функции $f(x)$ в ортонормированном базисе вейвлетов и является своеобразной оценкой $f(x)$ в подпространстве V_{j_0} . Поэтому $\hat{f}(x)$ можно еще интерпретировать как проекцию $f(x)$ на подпространство V_{j_0} , т.е. $\hat{f}(x) = P_{j_0}(f)$.

Остается вопрос о выборе начального значения j_0 параметра масштаба или более конкретно о задании аппроксимирующих коэффициентов $a_{j_0,k}$. Возможно несколько вариантов задания, которые приведены в монографии [30, с. 122–123]. Остановимся на достаточно простом способе, который используется в системах компьютерной математики.

Как правило, при фильтрации сигналов и изображений обрабатываемые объекты задаются численными одномерными или двумерными массивами значений функции в узлах равномерной сетки (т.е. расстояние между узлами постоянно). В этом случае целесообразно использовать следующее задание:

$$a_{j_0,k} = f_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (1.3.8)$$

1.3.2. Быстрое вейвлет-преобразование

Напомним, что для вейвлет-представления функции с глубиной разложения J необходимо вычислить набор коэффициентов (1.3.6), которые определяются интегрированием:

$$a_{j_0+J,k} = \langle f, \varphi_{j_0+J,k} \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0+J,k}(x) dx; \quad (1.3.9)$$

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx. \quad (1.3.10)$$

Возникает проблема вычисления большого количества интегралов с необходимой точностью от осциллирующих функций, что обуславливает значительные вычислительные затраты. *Быстрое*

вейвлет-преобразование, предложенное Малла, позволяет решить эту проблему [47, 48].

Алгоритм Малла дает возможность вычислять коэффициенты без интегрирования, используя алгебраические операции умножения и суммирования. Не останавливаясь на построении этого алгоритма, запишем конечные формулы:

$$a_{j+1,k} = \sum_n h_n a_{j,n+2k} ; \quad (1.3.11)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_n g_n a_{j,n+2k} , \quad (1.3.12)$$

Задав коэффициенты $a_{j_0,k}$ и рекуррентно повторяя формулы для каждого уровня разложения $j = j_0, j_0 + 1, \dots, j_0 + J$, можно вычислить все коэффициенты (1.3.6), т.е. осуществить декомпозицию исходной последовательности.

Обратной операцией к вейвлет-преобразованию является *вейвлет-реконструкция*, когда по заданному набору коэффициентов (1.3.6) необходимо вычислить аппроксимирующие коэффициенты $a_{j_0,k}$. Для этого используется рекуррентная формула:

$$a_{j,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j+1,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j+1,k} . \quad (1.3.13)$$

Вейвлет-реконструкцию часто называют *обратным вейвлет-преобразованием*.

Видно, что изложенные алгоритмы быстрого прямого и обратного преобразования имеют особенности, которые необходимо учитывать при использовании этих алгоритмов:

1. Число N коэффициентов $a_{j_0,k}$ должно быть кратным 2, т.е.

$$N/2^m = \text{целое число} , \quad (1.3.14)$$

где $m > 0$. При задании (1.3.8) это означает, что число значений функции должно удовлетворять (1.3.14). Это позволяет определить значение «нулевого» уровня j_0 из уравнения:

$$N = 2^{j_0}. \quad (3.3.15)$$

2. При прямом вейвлет-преобразовании при переходе с уровня j к уровню $j+1$ количество коэффициентов $a_{j,k}$ и $d_{j,k}$ уменьшается в два раза.

3. При обратном вейвлет-преобразовании при переходе с уровня j к уровню $j-1$ количество коэффициентов $a_{j,k}$, $d_{j,k}$ увеличиваются в два раза.

Замечание 1.3.1. Максимальное значение m , при котором выполняется (1.3.14), определяет максимально возможную глубину разложения J_{\max} . Например, пусть $N = 384$. Тогда максимальное значение m , при котором выполняется (1.3.14), равно 7, т.е. $\frac{388}{2^7} = 3$. Следовательно, $J_{\max} = 7$. ♦

Если ни при одном $m > 1$ условие (1.3.14) не выполняется, то происходит увеличение количества отсчетов до ближайшего большего значения N различными способами (это называется заданием *граничных условий*). Например, периодическим продолжением (периодические граничные условия), симметричным (симметричные граничные условия), добавлением нулей, интерполяцией исходного сигнала до необходимого количества точек с новым шагом дискретизации.

В пакет *Wavelet Expansion* системы компьютерной математики MathCAD включены две функции, позволяющие определить максимальную глубину разложения для заданного вектора a с числом элементов N :

MaxDWTLevel(a) – периодические граничные условия;

MaxDWTSLevel(a) – симметрические граничные условия.

1.3.3. Функции MathCAD для быстрого вейвлет-преобразования

В пакет Wavelet Expansion включены несколько функций, осуществляющих прямое и обратное вейвлет-преобразование с использованием алгоритма Малла.

Функция $dwt(a, J, s)$ осуществляет прямое вейвлет-преобразование с вектора a глубиной разложения J . Параметр s – переменная, определяющая тип используемых вейвлетов. Например, $s := daublet(8)$. Для периодических граничных условий величина N (количество элементов вектора a) должно удовлетворять условию (1.3.14).

Функция $dwts(a, J, s)$ осуществляет прямое вейвлет-преобразование глубиной разложения J с симметричными граничными условиями. Эта функция требует использование симметричных вейвлетов (например, вейвлет Хаара $daublet(2)$). Назначение формальных параметров то же, что и у функции dwt . Величина N должна удовлетворять условию $N \geq 2^m$, $m > 0$.

Результатом работы этих двух функций является вектор длиной N , в котором размещаются следующие коэффициенты вейвлет-преобразования:

$$D_1 = \{d_{j_0+1,k}\} - \text{длиной } \frac{N}{2}; \quad D_2 = \{d_{j_0+2,k}\} - \text{длиной } \frac{N}{4};$$

$$\dots; \quad D_J = \{d_{j_0+J,k}\} - \text{длиной } \frac{N}{2^J}; \quad A_J = \{a_{j_0+J,k}\} - \text{длиной } \frac{N}{2^J}.$$

Эти коэффициенты размещаются в векторе (результат работы функции) в следующем порядке: первоначально идут коэффициенты A_J , затем D_J , D_{J-1} и т.д. Последними размещаются D_1 , т.е. результат работы функций – массив длиной N – имеет структуру, показанную на рис. 1.9.

A_J	D_J	D_2	D_1
-------	-------	-------	-------

Рис. 1.9. Порядок расположения коэффициентов разложения

Функция $idwt(c,J,s)$ осуществляет обратное вейвлет-преобразование с периодическими граничными условиями. Вектор c должен иметь структуру, показанную на рис. 1.9. Значение J то же, что и при выполнении функции dwt .

Функция $idwts(c,J,s)$ осуществляет обратное вейвлет-преобразование с симметричными граничными условиями. Вектор c длиной N должен иметь структуру, показанную на рис. 1.9.

Пример 1.3.1. На рис. 1.10 приведен фрагмент документа MathCAD, в котором вычисляется массив значений функции $f(x)$ (называемой доплеровским сигналом и часто используемой в качестве тестовой для вейвлет-разложений), состоящий из $N=1024$ значений. Необходимо определить точность восстановления значений функции после выполнения прямого и обратного вейвлет-преобразования.

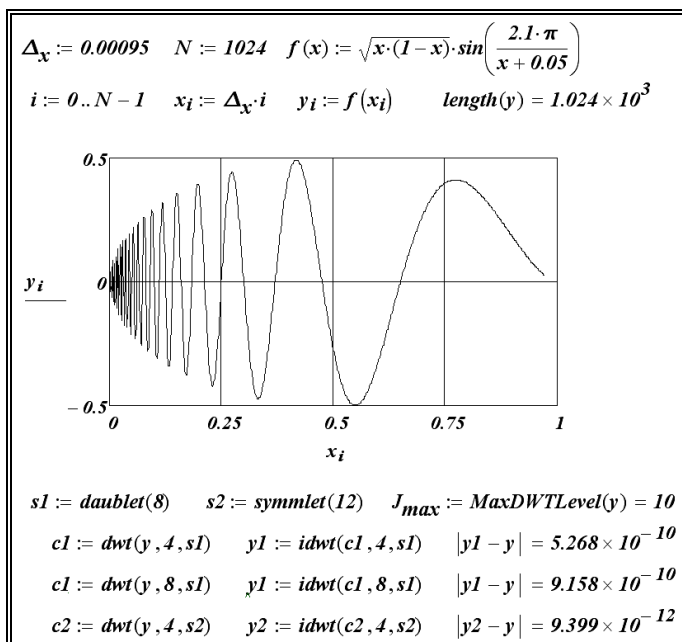


Рис. 1.10. Прямое и обратное вейвлет-преобразование «доплеровского» сигнала

Решение. В этом же документе MathCAD (см. рис. 1.10) показаны обращения к функциям dwt , $idwt$ для двух типов вейвлет: $daublet(8)$ и $symmlet(12)$ и различных глубинах разложения $J = 4.8$. Здесь же приведены евклидовы нормы векторов ошибки $\hat{y} - y$, из которых видна высокая точность реконструкции значений функции. ☺

1.4. Кратномасштабное вейвлет-представление изображений

Рассмотрено вейвлет-представление двумерных сигналов (изображений), которое в дальнейшем будет базовой конструкцией при построении алгоритмов фильтрации.

1.4.1. Вейвлет-представление изображений

Любое изображение можно интерпретировать как функцию двух переменных $f(x, y)$. Алгоритм вейвлет-преобразования двумерной функции аналогичен одномерному случаю.

Как и ранее полагаем, что $\varphi(x)$ – масштабируемая функция (отцовский вейвлет), а $\psi(x)$ – вейвлет (материнский вейвлет). Они порождают ортонормированные базисные функции в пространстве $L_2(R)$: $\{\varphi_{j,n}(x)\}$, $\{\psi_{j,n}(x)\}$. Тензорное произведение этих функций порождает следующие базисные функции в $L_2(R^2)$:

$$\begin{aligned} \{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y) &= \varphi_{j,n}(x) \cdot \varphi_{j,m}(y)\}; \\ \{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y) &= \varphi_{j,n}(x) \cdot \psi_{j,m}(y)\}; \\ \{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y) &= \psi_{j,n}(x) \cdot \varphi_{j,m}(y)\}; \\ \{\psi\psi_{j,n,m}(x, y) &= \psi_{j,n}(x) \cdot \psi_{j,m}(y)\}. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Соответствующие коэффициенты разложения принято называть следующим образом.

- аппроксимирующие коэффициенты $A_j = \{aa_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\phi\phi_{j,n,m}(x, y)\}$;
- горизонтальные детализирующие коэффициенты $H_j = \{ad_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\phi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$;
- вертикальные детализирующие коэффициенты $V_j = \{da_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\phi_{j,n,m}(x, y)\}$;
- диагональные детализирующие коэффициенты $D_j = \{dd_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$.

На втором уровне разложения аналогичной обработке подвергается матрица коэффициентов $A_1 \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2)$. Обобщая, приходим к следующей схеме разложения (F – матрица исходного изображения):

$$F \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, H_1, V_1, D_1) \rightarrow \dots$$

Отметим закономерность изменения размеров двумерных массивов коэффициентов разложения, а именно: на каждом уровне разложения размеры массивов новых коэффициентов *уменьшаются в два раза* по сравнению с предыдущими массивами. При этом сумма размеров массивов коэффициентов равна размеру исходной матрицы F , что говорит о сохранении «объема» информации, содержащейся в F .

Например, пусть исходная матрица F имеет размеры 512 (число строк) \times 384 (число столбцов). Тогда массивы коэффици-

ентов A_1, H_1, V_1, D_1 имеют размеры 256×192 , массивы коэффициентов A_2, H_2, V_2, D_2 – размеры 128×96 и т.д.

Обратное двумерное вейвлет-преобразование осуществляется по следующей схеме:

$$\dots \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow F.$$

При переходе с уровня j на $j-1$ размеры всех матриц коэффициентов увеличиваются в два раза.

Двумерным вейвлет-представлением с глубиной разложения J (с начального уровня $j = j_0$) будем называть запись:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) = & \sum_k \sum_n aa_{j_0+J,k,n} \varphi\varphi_{j_0+J,k,n}(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \sum_n ad_{j_0+j,k,n} \varphi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \sum_n da_{j_0+j,k,n} \psi\varphi_{j_0+j,k,n}(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \sum_n dd_{j_0+j,k,n} \psi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y), \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

где $aa_{j_0+J,k,n}$, $ad_{j_0+j,k,n}$, $da_{j_0+j,k,n}$, $dd_{j_0+j,k,n}$ – коэффициенты разложения по базовым функциям $\varphi\varphi_{j_0+J,k,n}(x, y)$, $\varphi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y)$, $\psi\varphi_{j_0+j,k,n}(x, y)$, $\psi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y)$, являются элементами матриц A_j, H_j, V_j, D_j соответственно.

1.4.2. Функции MathCAD для выполнения двумерного вейвлет-преобразования

Пакет *Wavelet Expansion* системы компьютерной математики MathCAD содержит набор функций, позволяющих вычислить значения двумерных вейвлетов и выполнить вейвлет-преобразование изображений. Приведем описание некоторых из них.

Функция $wavelet2d(x, y, j, kx, ky, nx, ny, s)$ – вычисляет значение в точке (x, y) следующих вейвлетов:

$$\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 0, ny = 0;$$

$$\varphi\psi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 0, ny = 1;$$

$$\psi\varphi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 1, ny = 0;$$

$$\psi\psi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 1, ny = 1.$$

Назначение других формальных параметров:

- j – целое положительное число, определяющее масштаб преобразования;
- kx – целое число, определяющее горизонтальное положение вейвлетов;
- ky – целое число, определяющее вертикальное положение вейвлетов;
- s – переменная, задающая семейство вейвлетов. Например, $s := daublet(4)$.

Допустимы следующие сокращения для указания семейства вейвлетов:

- $d, daub, daublet$ – семейство вейвлетов Добеши;
- $s, symm, symmlet$ – семейство симметричных вейвлетов;
- $coif, c, coiflet$ – семейство вейвлетов Койфлета;
- nx, ny – целые числа указывающие род (отцовский или материнский) вейвлета.

Функция $father2d(x, y, j, kx, ky, ss)$ вычисляет величину отцовского вейвлета $\varphi\varphi(x, y)$ в точке (x, y) . Параметр ss строковая константа или переменная, значение которой определяет обозначения семейства вейвлетов. Например, $ss := "daublet(8)"$.

Назначение остальных формальных параметров то же, что у функции $wavelet2d$.

Функция $mother2d(x, y, j, kx, ky, ss, ds)$ вычисляет величину материнского вейвлета в точке (x, y) . Параметр ds – строковая

константа или переменная определяющая род вейвлетов. Используются следующие значения:

- "V" – вейвлет $\psi\varphi(x, y)$;
- "H" – вейвлет $\varphi\psi(x, y)$;
- "D" – вейвлет $\psi\psi(x, y)$.

Назначение остальных формальных параметров совпадает с *father2d*.

Функция $dwt(a, J, s)$ вычисляет прямое вейвлет-преобразование матрицы изображения (размера $N \times M$) глубиной разложения J . Размеры матрицы N, M должны удовлетворять условию:

$$\frac{N}{2^J} = \text{целое число}; \quad \frac{M}{2^J} = \text{целое число}.$$

Переменная s задает семейство вейвлетов. Например, $s := d(8)$ или $s := \text{symmlet}(12)$.

Функция $idwt(a, J, s)$ вычисляет обратное вейвлет-преобразование матрицы коэффициентов разложения a , которая была вычислена с использованием функции dwt . Назначение формальных параметров J, s те же, что и функции dwt .

Пример 1.4.1. На левой фотографии рис. 1.11 приводится изображение LENA (часто используемое в качестве тестового при исследовании алгоритмов фильтрации) размера 256×256 . Необходимо выполнить прямое и обратное двумерное вейвлет-преобразование.

Решение. На рис. 1.11 приведен фрагмент документа MathCAD, в котором с использованием функций $dwt, idwt$ выполняется прямое и обратное вейвлет-преобразование, результат которого показан на правой фотографии. Видна идентичность этих двух преобразований, что подтверждается незначительной ошибкой преобразования (евклидова норма $\|A - A1\| \sim 10^{-11}$).

На рис. 1.12 показаны изображения массивов коэффициентов разложения ($J=1$) A_1, H_1, V_1, D_1 (матрицы размера 128×128). Видно, что матрица A_1 представляет собой сглажен-

ный образ исходной фотографии, а остальные массивы «дополняют» этот образ до исходной фотографии LENA. ☺

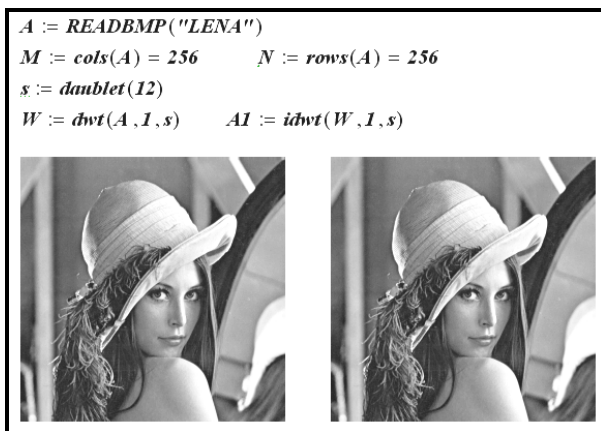


Рис. 1.11. Исходное и восстановленное изображения

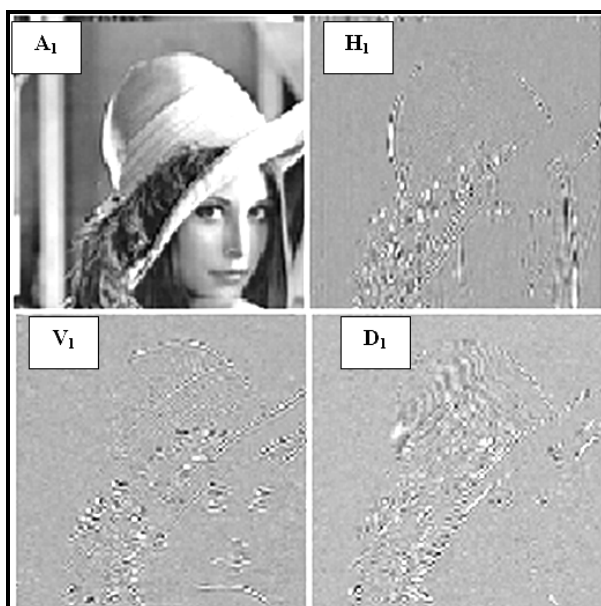


Рис. 1.12. Матрицы коэффициентов разложения

Обобщая содержание этой главы, можно сделать **следующие выводы:**

Вейвлет-преобразование является эффективным инструментом для анализа и обработки сигналов и изображений.

Пирамидальный алгоритм Малла позволяет с наименьшими вычислительными затратами (они линейно зависят от числа значений обрабатываемой функции) находить коэффициенты разложения по базисным функциям ортогональных пространств.

Вейвлет-преобразование сигналов и изображений широко используется для построения различных алгоритмов обработки, включая сжатие сигналов и восстановление сигналов на входе динамических систем. Подходы к построению алгоритмов фильтрации зашумленных сигналов и изображений будут рассмотрены в следующей главе.

Глава 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Рассматривается построение оптимального алгоритма фильтрации сигналов и изображений, основанного на вейвлет-разложении и минимизирующего среднеквадратическую ошибку фильтрации. Предлагается две реализации оптимального алгоритма фильтрации на практике в условиях ограниченной априорной информации (или отсутствие таковой) о шуме (погрешности) измерения и обрабатываемой функции.

2.1. Кратномасштабное представление и задачи фильтрации сигналов и изображений

Получены статистические характеристики коэффициентов вейвлет-разложений, вычисленных по зашумленным (искаженным) значениям сигнала или изображения, а также рассмотрен общий подход к построению алгоритмов вейвлет-фильтрации.

2.1.1. Статистические характеристики коэффициентов вейвлет-разложения зашумленных сигналов

В первой главе при изложении основратномасштабного разложения сигналов и изображений неявно полагалось, что эти объекты заданы своими *точными значениями* в узлах регулярной сетки. На практике это допущение не выполняется и возникает вопрос: как шумы измерений влияют на значения и свойства коэффициентов вейвлет-разложений?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующую модель измеряемого одномерного сигнала:

$$\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i = f_i + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1.1)$$

где $f_i = f(x_i)$ – точное значение сигнала; η_i – шум измерения значения $f(x_i)$. Величины \tilde{f}_i в дальнейшем будем называть

зашумленными значениями исходной функции $f(x)$. Первоначально относительно η_i сделаем не обременительные допущения:

- величины η_i являются случайными;
- $M[\eta_i] = 0, i = 1, \dots, N;$ (2.1.2)

- $D[\eta_i] = \sigma^2, i = 1, \dots, N;$ (2.1.3)

- $M[\eta_i \eta_j] = 0$, если $i \neq j$. (2.1.4)

Последнее равенство означает некоррелированность значений η_i, η_j при $i \neq j$.

Рассмотрим вейвлет-разложение глубиной разложения J (см. п. 1.3):

$$f(x) = \sum_k a_{J+j_0,k} \varphi_{J+j_0,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j_0+j,k} \psi_{j_0+j,k}(x),$$

где $\varphi_{J+j_0,k}(x)$, $\psi_{j_0+j,k}(x)$ – семейство ортонормированных вейвлетов. Начальный уровень разложения j_0 определяется из равенства $N = 2^{j_0}$, но для упрощения дальнейших записей положим $j_0 = 0$. Тогда имеем следующую запись:

$$f(x) = \sum_k a_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (2.1.5)$$

где аппроксимирующие $a_{J,k}$ и детализирующие коэффициенты $d_{j,k}$ вычисляются по точным значениям f_i сигнала $f(x)$ с использованием алгоритма Малла (см. п. 1.3.2).

Обозначим $\tilde{a}_{J,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ коэффициенты, которые вычисляются по зашумленным значениям \tilde{f}_i и определим их статистические характеристики. Для этого приведем запись алгоритма Малла для вычисления коэффициентов $\tilde{a}_{1,k}$, $\tilde{d}_{1,k}$ (т.е. $j=1$) по значениям $\tilde{a}_{0,k} = \tilde{f}_k$, $k = 1, \dots, N$:

$$\tilde{a}_{1,k} = \sum_m h_m \tilde{a}_{0,2k+m} ; \tilde{d}_{1,k} = \sum_m g_m \tilde{a}_{0,2k+m} . \quad (2.1.6)$$

Введем ошибки вычисления коэффициентов: $\varepsilon_{1,k}^a = \tilde{a}_{1,k} - a_{1,k}$; $\varepsilon_{1,k}^d = \tilde{d}_{1,k} - d_{1,k}$ и перепишем предыдущие выражения относительно этих ошибок: $\varepsilon_{1,k}^a = \sum_m h_m \eta_{2k+m}$; $\varepsilon_{1,k}^d = \sum_m g_m \eta_{2k+m}$. Вычислим корреляционный момент между двумя величинами $\varepsilon_{a_{1,k}}$, $\varepsilon_{a_{1,k+l}}$:

$$\begin{aligned} M \left[\varepsilon_{1,k}^a \varepsilon_{1,k+l}^a \right] &= M \left[\sum_m h_m \eta_{m+2k} \sum_{m'} h_{m'} \eta_{m'+2k+2l} \right] = \\ &= \sum_m \sum_{m'} h_m h_{m'} M \left[\eta_{m+2k} \eta_{m'+2k+2l} \right]. \end{aligned}$$

Если справедливы предположения (2.1.3), (2.1.4), то получаем

$$M \left[\varepsilon_{1,k}^a \varepsilon_{1,k+l}^a \right] = \sigma^2 \sum_m h_m h_{m-2l} . \quad (2.1.7)$$

В силу ортонормированности отцовского вейвлета имеем

$$\sum_m h_m h_{m-2l} = \delta_{0,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = 0; \\ 0, & \text{если } l \neq 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Тогда из формулы (2.1.7) следуют статистические свойства ошибок $\varepsilon_{1,k}^a$:

а) $\varepsilon_{1,k}^a$ являются случайными величинами с нулевым средним, т.е. $M \left[\varepsilon_{1,k}^a \right] = 0$ для всех k ;

б) дисперсия $D \left[\varepsilon_{1,k}^a \right] = \sigma^2$;

в) случайные величины $\varepsilon_{1,k}^a$ и $\varepsilon_{1,l}^a$ не коррелированы друг с другом при $k \neq l$.

Аналогично можно показать, что при выполнении условия

$$\sum_m g_m g_{m-2l} = \delta_{0,l}, \quad (2.1.9)$$

(которое справедливо для ортонормированных материнских вейвлетов), ошибки $\varepsilon_{1,k}^d$ имеют нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и не коррелированы друг с другом.

Определим корреляционный момент между ошибками $\varepsilon_{1,k}^a$, $\varepsilon_{1,l}^d$:

$$\begin{aligned} M[\varepsilon_{1,k}^a \cdot \varepsilon_{1,k+l}^d] &= M\left[\sum_m h_m \eta_{m+2k} \sum_{m'} g_{m'} \eta_{m'+2k+2l}\right] = \\ &= \sum_m \sum_{m'} h_m g_{m'} M[\eta_{m+2k} \eta_{m+2k+2l}] = \sigma^2 \sum_m h_m g_{m-2l}. \end{aligned}$$

В силу ортогональности пространств V_2 и W_1 имеем:

$$\sum_m h_m g_{m-2l} = 0 \quad \text{при любых } l, \quad (2.1.10)$$

а следовательно, ошибки $\varepsilon_{1,k}^a$ и $\varepsilon_{1,k}^d$ не коррелированы друг с другом.

Ошибки $\varepsilon_{1,k}^a$ и $\varepsilon_{1,k}^d$ имеют те же первые два момента, что и исходный шум η_i . Поэтому, повторяя на каждом уровне разложения сходные построения, можно доказать следующие свойства:

$$\bullet \quad M[\varepsilon_{j,k}^a] = 0; \quad M[\varepsilon_{j,k}^d] = 0 \quad \text{для всех } k; \quad (2.1.11)$$

$$\bullet \quad D[\varepsilon_{j,k}^a] = \sigma^2; \quad D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2 \quad \text{для всех } k; \quad (2.1.12)$$

$$\bullet \quad M[\varepsilon_{j,k+l}^a \varepsilon_{j,k}^a] = 0 \quad \text{для } l \neq 0; \quad (2.1.13)$$

$$\bullet M[\varepsilon_{j,k+l}^d \varepsilon_{j,k}^d] = 0 \text{ для всех } l \neq 0; \quad (2.1.14)$$

$$\bullet M[\varepsilon_{j,k}^a \varepsilon_{j,l}^d] = 0 \text{ для всех } k, l. \quad (2.1.15)$$

Следует отметить, что несмотря на одинаковую дисперсию ошибок вычисления коэффициентов $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$, их относительная величина будет различной. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 2.1.1. Тестовый «ступенчатый» сигнал, часто используемый в литературе при исследовании алгоритмов фильтрации, задан своими значениями $f_i = f(x_i)$, $x_i \in [0,1]$, в 2048 узлах x_i (рис. 2.1а). Необходимо определить влияние погрешностей задания этих значений на точность вычисления коэффициентов вейвлет-разложений разного уровня.

Решение. По точным значениям $f_i = f(x_i)$ были вычислены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши8 (т.е. детализирующие коэффициенты) уровней $j = 1, \dots, J = 7$. На рис. 2.1б, в, г показаны значения «точных» коэффициентов $d_{j,k}$ для уровней разложения $j = 1, 3, 5$, количество которых на каждом уровне определяется выражением $N_j = \frac{N}{2^j}$, $j = 1, 3, 5$.

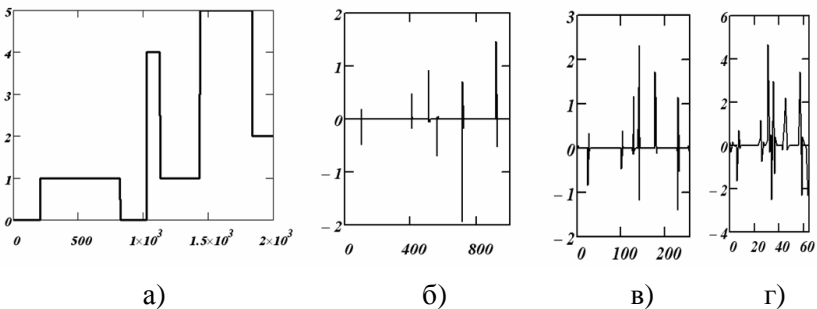


Рис. 2.1. Значения «точной» функции $f(t)$ и «точных» коэффициентов разложения

Относительный уровень погрешностей задания значений функции определялся величиной $\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\|/\|f\|$, где f, \tilde{f} – векторы, составленные из значений f_i, \tilde{f}_i ; $\|\tilde{f}\|, \|f\|$ – евклидовы нормы векторов. Значения \tilde{f}_i , соответствующие $\delta_\eta = 0.12$, показаны на рис. 2.2а. По этим значениям были вычислены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши8 уровней $j=1, \dots, J=7$. На рис. 2б, в, г показаны значения «зашумленных» коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$ для уровней разложения $j=1, 3, 5$.

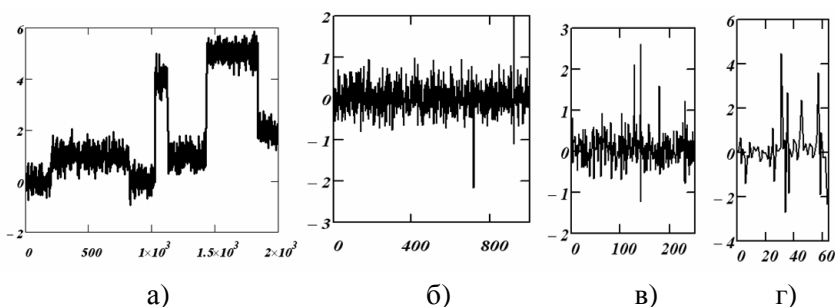


Рис. 2.2. Значения «зашумленной» функции $f(t)$ и «зашумленных» коэффициентов разложения

Сравнивая эти рисунки с рисунками «точных» коэффициентов видим, что погрешности η_i в основном искажают детализирующие коэффициенты уровней 1, 2, 3. Это хорошо подтверждается данными табл. 2.1, в которой приведены относительные ошибки вычисления коэффициентов

$$\delta_a(j) = \|\tilde{a}_j - a_j\|/\|a_j\|, \quad \delta_d(j) = \|\tilde{d}_j - d_j\|/\|d_j\|,$$

где $a_j, \tilde{a}_j, d_j, \tilde{d}_j$ – векторы, составленные из соответствующих коэффициентов разложения j -го уровня.

Из табл. 2.1 видно, что относительная ошибка детализирующих коэффициентов \tilde{d}_j существенно выше (для малых значений j) по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на практике обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$. ☹

Таблица 2.1

Уровень разложения	Относительные ошибки	
	$\delta_a(j)$	$\delta_d(j)$
1	0,082	2,674
2	0,059	0,983
3	0,044	0,637
4	0,033	0,185
5	0,024	0,102
6	0,017	0,051
7	0,012	0,028

2.1.2. Общий подход к фильтрации шума на основе вейвлет-разложения

Напомним, что алгоритмы Фурье-фильтрации основываются на предположении, что коэффициенты дискретного преобразования Фурье с большими индексами l (высокие частоты) в основном обусловлены шумами измерения и зануляя эти коэффициенты, удается отфильтровать (лучше или хуже) шум измерения [19, 28, 32].

Алгоритмы вейвлет-фильтрации основаны на следующих свойствах вейвлет-разложения:

- информация о «точном» сигнале $f(x)$ содержится только в небольшом количестве коэффициентов вейвлет-разложения (*информативные коэффициенты*). Остальные коэффициенты равны нулю, либо незначительно отличаются от нуля по абсолютной величине и их можно назвать *незначимыми* (шумовыми) коэффициентами разложения. Это свойство также широко используется для сжатия сигналов и изображений;

- шум измерения равномерно «перераспределяется» по всем коэффициентам вейвлет-разложения. В частности, если значения шума η_i не коррелированы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 , то коэффициенты разложения этого шума по базису ортогональных вейвлетов также не коррелированы между собой и имеют одинаковую дисперсию.

Иллюстрацией этих двух свойств является рассмотренный ранее пример 2.1.1.

Так, из рис. 2.1 видно, что:

- только небольшое число коэффициентов $d_{j,k}$ точной функции уровней разложения 1, 3, 5 отличны от нуля;

- особенно сильному искажению подвергаются детализирующие коэффициенты с небольшим уровнем разложения.

Приведенные и проиллюстрированные свойства коэффициентов вейвлет-разложения определяют общий подход для построения алгоритмов фильтрации с использованием вейвлетов (в дальнейшем вейвлет-фильтрации):

для уменьшения уровня шума в исходных данных (т.е. для фильтрации шума) необходимо к коэффициентам разложения $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ применить алгоритмы обработки, уменьшающие их дисперсию, а затем от этих новых «отфильтрованных» коэффициентов разложения взять обратное вейвлет-преобразование.

Таким образом, алгоритм вейвлет-фильтрации включает три этапа:

- взятие прямого вейвлет-преобразования от зашумленных значений функции (вычисление «зашумленных» коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}, \tilde{d}_{j,k}$);
- обработка коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}, \tilde{d}_{j,k}$ (построение оценок $\hat{a}_{j,k}, \hat{d}_{j,k}$ для точных коэффициентов $a_{j,k}, d_{j,k}$);
- взятие обратного вейвлет-преобразования от коэффициентов $\hat{a}_{j,k}, \hat{d}_{j,k}$.

Замечание 2.1.1. Алгоритмы обработки коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}, \tilde{d}_{j,k}$ должны максимально уменьшать дисперсию этих коэффициентов, внося при этом минимальное смещение относительно точных значений коэффициентов $a_{j,k}, d_{j,k}$. Очевидно, что создание таких алгоритмов является достаточно трудной задачей. ♦

Одним из простейших алгоритмов обработки зашумленных коэффициентов вейвлет-разложения является использование на втором этапе порогового алгоритма с «жесткой» пороговой функцией:

$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda; \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Если обрабатываемый коэффициент меньше величины порога λ , то этот коэффициент заменяется нулем, в противном случае коэффициент сохраняется и «участвует» в обратном вейвлет-преобразовании. В этом алгоритме «управляющим» параметром, от которого зависит ошибка фильтрации, является величина по-

рога λ . Проиллюстрируем критичность его выбора следующим примером.

Пример 2.1.2. В качестве зашумленных значений функции примем значения, изображенные на рис. 2.2 и соответствующие относительному уровню шума

$$\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\| / \|f\| = 0.12.$$

По этим значениям необходимо вычислить коэффициенты вейвлет-разложения в базисе Добеши8 глубиной разложения 5, подвергнуть детализирующие коэффициенты пороговой обработке и определить ошибки фильтрации при различных величинах λ .

Решение. Первоначально примем $\lambda = 0.5$ и с помощью пороговой функции (2.1.16) обработаем все детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$ уровней разложения $j = 1, 2, 3, 4, 5$. На рис. 2.3а приведены результаты обработки коэффициентов $\tilde{d}_{1,k}$ (сплошная линия – точные значения коэффициентов, точки – обработанные). Видно, что часть *зашумленных коэффициентов* разложения, которые обусловлены только шумом, «остались» после обработки с такой величиной порога. Это привело к тому, что результат обратного вейвлет-преобразования содержит значительный «остаточный» шум (см. рис. 2.3б) и относительная ошибка фильтрации $\delta_f(\lambda) = \|\hat{f}_\lambda - f\| / \|f\|$ равна 0.082. На рис. 2.4а приведены результаты обработки коэффициентов $\tilde{d}_{1,k}$ с порогом $\lambda = 1.0$, а на рис. 2.4б – соответствующая отфильтрованная функция. Относительная ошибка фильтрации равна 0.044. Видно, что при этом λ часть точных детализирующих коэффициентов не сохранились в результате обработки и это вызвало искажение сигнала в угловых («особых») точках (эффект, подобный эффекту Гиббса при Фурье-фильтрации). ●

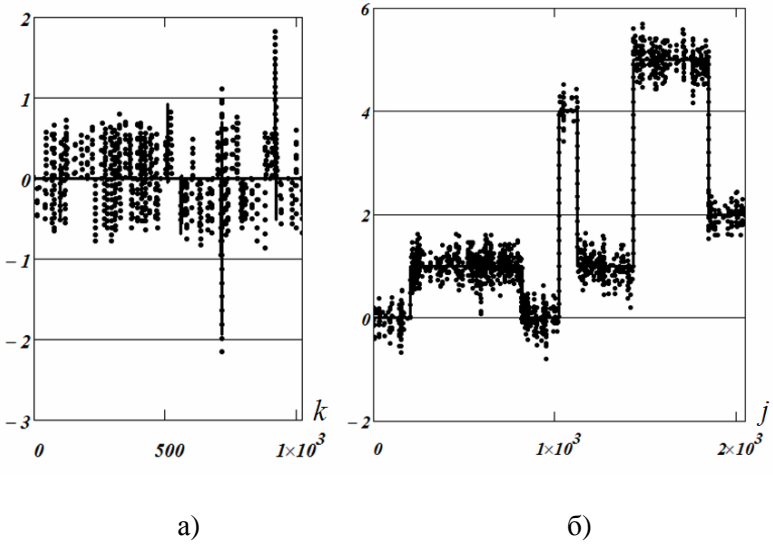


Рис. 2.3. Вейвлет-фильтрация при $\lambda = 0.5$

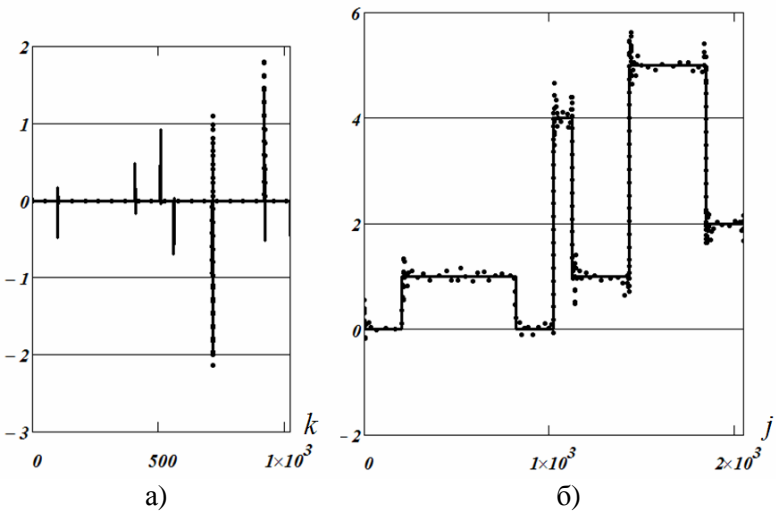


Рис. 2.4. Вейвлет-фильтрация при $\lambda = 1.0$

Очевидно, что для обработки коэффициентов разложения необходимо иметь программные средства, позволяющие:

- выбрать из общего массива коэффициентов разложения вектор, содержащий аппроксимирующие или детализирующие коэффициенты заданного уровня разложения j (например, вектор из коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$);
- вставить в общий массив коэффициента разложения вектор, содержащий аппроксимирующие или детализирующие коэффициенты заданного уровня разложения j (например, вектор из коэффициентов $\hat{d}_{2,k}$, полученный обработкой коэффициентов $\tilde{d}_{2,k}$).

Рассмотрим реализацию этих операций в пакете MathCAD.

2.1.3. Функции MathCAD обработки коэффициентов вейвлет-разложения

В пакете *Wavelet Extension* системы MathCAD имеется ряд функций, которые выполняют эти операции.

Функция $get_smooth(w, l)$ позволяет выделить вектор аппроксимирующих коэффициентов разложения $a_{l,k}$ по базису $\varphi_{l,k}(x)$ уровня разложения l из массива коэффициентов w (массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $get_detail(w, l)$ позволяет выделять вектор детализирующих коэффициентов разложения $d_{l,k}$ по базису $\psi_{l,k}(x)$ уровня разложения l из массива коэффициентов w (где массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $get_subband(w, l, m)$ выделяет вектор аппроксимирующих коэффициентов (если $m=0$) или вектор детализирующих коэффициентов (если $m=1$) уровня разложения l из массива коэффициентов w (где массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $put_smooth(w, l, y)$ заменяет в массиве w аппроксимирующие коэффициенты уровня разложения l на элементы вектора y .

Функция $put_detail(w, l, y)$ заменяет в массиве w детализирующие коэффициенты уровня разложения l на элементы вектора y .

2.2. Оптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации

Построен оптимальный (винеровский) алгоритм вейвлет-фильтрации, использующий отношение «шум/сигнал» для каждого коэффициента разложения.

2.2.1. Среднеквадратическая ошибка вейвлет-фильтрации

Вернемся к вейвлет-представлению «точного» сигнала $f(x)$ с глубиной разложения J :

$$f(x) = \sum_k a_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (2.2.1)$$

Напомним, что начальный уровень разложения j_0 определяется из равенства $N = 2^{j_0}$, но для удобства дальнейших обозначений принимаем $j_0 = 0$. Вновь предположим, что значения функции $f(x)$ заданы в узлах x_i , $1 \leq i \leq N$ со случайной аддитивной погрешностью (шум измерения) η_i , имеющей нулевое среднее и дисперсию σ^2 . Очевидно, что коэффициенты разложения (глубина разложения равна J)

$$\{\tilde{d}_{1,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{J,k}\}, \{\tilde{a}_{J,k}\}, k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2^j}, j = 1, \dots, J, \quad (2.2.2)$$

вычисленные по зашумленным значениям $\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i$, также содержат случайные ошибки $\mathcal{E}_{j,k}^d, \mathcal{E}_{J,k}^a$. В силу линейности прямо-

го дискретного вейвлет-преобразования эти ошибки носят аддитивный характер, т.е. справедливы следующие модели:

$$\tilde{d}_{j,k} = d_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^d; \quad \tilde{a}_{j,k} = a_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^a. \quad (2.2.3)$$

Предположим, что по коэффициентам выражения (2.2.2) были вычислены оценки $\{\hat{d}_{j,k}\}, \{\hat{a}_{j,k}\}$ для соответствующих коэффициентов $\{d_{j,k}\}, \{a_{j,k}\}$ и построена аппроксимирующая функция:

$$\hat{f}(x) = \sum_k \hat{a}_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (2.2.4)$$

Определим среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации выражением

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\int_R (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] = M \left[\int_R \varepsilon^2(x) dx \right], \quad (2.2.5)$$

где ошибка фильтрации $\varepsilon(x) = \hat{f}(x) - f(x)$ определяется (с учетом формулы (2.2.1)) выражением

$$\varepsilon(x) = \sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k}) \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k}) \psi_{j,k}(x). \quad (2.2.6)$$

Квадрат ошибки $\varepsilon^2(x)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(x) &= \sum_k \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{a}_{J,k'} - a_{J,k'}) \varphi_{J,k}(x) \varphi_{J,k'}(x) + \\ &+ \sum_{j=1}^J \sum_{j'=1}^J \sum_k \sum_{k'} (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})(\hat{d}_{j',k'} - d_{j',k'}) \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) + \\ &+ 2 \sum_k \sum_{j=1}^J \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{d}_{j,k'} - d_{j,k'}) \varphi_{J,k}(x) \psi_{j,k'}(x). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Напомним, что для используемых ортогональных вейвлетов имеют место следующие равенства:

$$\int_R \varphi_{j,k}(x) \varphi_{j',k'}(x) dx = \delta_{j',j} \delta_{k',k}; \quad \int_R \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) dx = \delta_{j',j} \delta_{k',k};$$

$$\int_R \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,k}(x) dx = 0, \quad \text{для любых } k, j,$$

где величина $\delta_{j,j'} = 1$, если $j = j'$ и равна 0 во всех остальных случаях. Поэтому выражение (2.2.5) можно записать в виде:

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})^2 \right] + M \left[\sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})^2 \right]. \quad (2.2.8)$$

2.2.2. Оптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложения

Коэффициенты $\{\hat{a}_{J,k}\}$, $\{\hat{d}_{j,k}\}$, доставляющие минимум функционалу (2.2.8), назовем *оптимальными оценками* коэффициентов вейвлет-разложения функции $f(t)$. Оптимальные оценки будем искать в виде

$$\hat{a}_{J,k} = \omega_{J,k}^a \cdot \tilde{a}_{J,k}, \quad \hat{d}_{j,k} = \omega_{j,k}^d \cdot \tilde{d}_{j,k}, \quad (2.2.9)$$

где $\omega_{J,k}^a, \omega_{j,k}^d$ назовем *фильтрующими множителями*. Так как математическое ожидание $M[\eta_i] = 0, i = 1, \dots, N$, то формулу (2.2.8) можно переписать в виде:

$$\Delta(\hat{f}) = \sum_k \left[(\omega_{J,k}^a - 1)^2 a_{J,k}^2 + (\omega_{J,k}^a)^2 D[\varepsilon_{J,k}^a] \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^J \sum_k \left[(\omega_{j,k}^d - 1)^2 d_{j,k}^2 + (\omega_{j,k}^d)^2 D[\varepsilon_{j,k}^d] \right], \quad (2.2.10)$$

где $D[\varepsilon_{J,k}^a], D[\varepsilon_{j,k}^d]$ – дисперсии соответствующих ошибок вычисления коэффициентов разложения. В п. 2.1 было показано,

что дисперсии $D[\varepsilon_{j,k}^a] = \sigma^2$, $D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2$, $j=1, \dots, J$, т.е. дисперсии одинаковы для всех уровней j . Тогда из необходимых и достаточных условий минимума $\Delta(\hat{f})$:

$$\frac{\partial \Delta(\hat{f})}{\partial \hat{a}_{j,k}} = 0; \quad \frac{\partial \Delta(\hat{f})}{\partial \hat{d}_{j,k}} = 0,$$

получаем *оптимальные фильтрующие множители*:

$$\omega_{opt_{j,k}}^a = \frac{1}{1 + S_{j,k}^a}; \quad \omega_{opt_{j,k}}^d = \frac{1}{1 + S_{j,k}^d} \quad (2.2.11)$$

и *оптимальные оценки* для соответствующих коэффициентов разложения:

$$\hat{a}_{opt_{j,k}} = \frac{1}{1 + S_{j,k}^a} \tilde{a}_{j,k}; \quad \hat{d}_{opt_{j,k}} = \frac{1}{1 + S_{j,k}^d} \tilde{d}_{j,k}. \quad (2.2.12)$$

Отношения

$$S_{j,k}^a = \frac{\sigma^2}{a_{j,k}^2}; \quad S_{j,k}^d = \frac{\sigma^2}{d_{j,k}^2} \quad (2.2.13)$$

можно трактовать как отношение «шум/сигнал» соответствующего коэффициента разложения. Можно показать, что СКО $\Delta(\hat{f})$ при оптимальных множителях (2.2.11) определяется выражением

$$\Delta(\hat{f}_{opt}) = \sum_k \frac{S_{j,k}^a}{1 + S_{j,k}^a} \cdot a_{j,k}^2 + \sum_{j=1}^J \sum_k \frac{S_{j,k}^d}{1 + S_{j,k}^d} \cdot d_{j,k}^2, \quad (2.2.14)$$

из которого (с учетом отношений (2.2.13)) видно, что при достаточно малых σ^2 величина $\Delta(\hat{f}_{opt})$ имеет порядок σ^2 , т.е. $\Delta(\hat{f}_{opt}) \sim \sigma^2$.

Оптимальные оценки (2.2.12), построенные из условия минимума СКО фильтрации, можно назвать *винеровскими оценками*, а соответствующий алгоритм фильтрации – *винеровским алгоритмом вейвлет-фильтрации*. В дальнейшем алгоритм фильтрации с коэффициентами (2.2.12) будем называть *оптимальным алгоритмом фильтрации*.

Замечание 2.2.1. Оценки (2.2.12) имеют характерную особенность: они получаются в результате «сжатия» соответствующих зашумленных коэффициентов, т.е. умножением $\{\tilde{a}_{j,k}\}$, $\{\tilde{d}_{j,k}\}$ на величины $\omega_{opt_{j,k}}^a$, $\omega_{opt_{j,k}}^d$ меньше 1 (или равные 1, если $\sigma^2 = 0$ и когда фильтрация не нужна). Такая процедура получения оценок в англоязычной литературе получила название *shrinkage* (глагол *to shrinkage* – сжимать). ♦

К сожалению, построенные оптимальные оценки (2.2.12) включают в себя отношение «шум/сигнал», который на практике неизвестен из-за незнания значений «точного» коэффициента разложения, стоящего в знаменателях выражений (2.2.13). *Эти оценки представляют теоретический интерес, так как указывают, к чему надо стремиться при построении оценок, реализуемых на практике.* Две практических реализации оптимального алгоритма вейвлет-фильтрации строятся ниже.

2.3. Квазиоптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал»

Предлагается вариант реализации оптимального алгоритма на практике, который не требует задания (или знания) точного значения отношения «шум/сигнал», а использующий итерационный алгоритм оценивания этого отношения.

2.3.1. Итерационное уточнение отношения «шум/сигнал»

Для упрощения записи алгоритма вычисления оценок с уточнением отношения «шум/сигнал» введем следующие обозначения: θ – любой точный коэффициент разложения; $\tilde{\theta}$ – коэффициент, вычисленный по зашумленным значениям функции; $\tilde{S} = \sigma^2 / \tilde{\theta}^2$. Пусть задана (или вычислена) некоторая «стартовая» оценка $\hat{\theta}^{(0)}$ для коэффициента θ . Вычислим нулевое приближение для отношения «шум/сигнал»: $\hat{S}^{(0)} = \sigma^2 / (\hat{\theta}^{(0)})^2$. Подставляя это отношение в формулу (2.2.12), получаем $\hat{\theta}^{(1)} = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(0)}} \tilde{\theta}$. Далее подставляя $\hat{\theta}^{(1)}$ в отношение «шум/сигнал», получаем $\hat{S}^{(1)}$, $\hat{\theta}^{(2)}$ и таким образом приходим к итерационной процедуре апостериорного уточнения отношения «шум/сигнал» вида

$$\hat{S}^{(n)} = \frac{\sigma^2}{(\hat{\theta}^{(n)})^2}; \hat{\theta}^{(n+1)} = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(n)}} \tilde{\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

Остановимся на сходимости этой итерационной процедуры. Для этого введем квадратное уравнение

$$\left(\hat{S}^*\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}}\right)\hat{S}^* + 1 = 0, \quad (2.3.2)$$

корни которого определяются по формуле

$$\hat{S}_{1,2}^* = \frac{1 - 2\tilde{S} \pm \sqrt{1 - 4\tilde{S}}}{2\tilde{S}} \quad (2.3.3)$$

и зависят от величины \tilde{S} .

Первоначально рассмотрим ситуацию $\tilde{S} \leq 1/4$ и выделим четыре предельных случая, положив для определенности

$S_1^* \leq S_2^*$. Доказательство предельных соотношений, соответствующих этим случаям, проводятся аналогично доказательствам работ [8, 12, 55, 57] и поэтому здесь ограничимся записью конечных выражений для пределов последовательности $\hat{S}^{(n)}$.

Случай 1: $0 < \hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_1^*$.

Тогда имеет место монотонная сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^*$.

Случай 2: $\hat{S}_1^* < \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^*$.

Тогда имеет место монотонная сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^*$.

Случай 3: $\hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_2^*$.

Случай 4: $\hat{S}^{(0)} > \hat{S}_2^*$.

Тогда имеет место монотонная сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \infty$.

Если $\hat{S} > 1/4$, то корни формулы (2.3.3) уравнения (2.3.2) являются комплексными величинами, что противоречит определению S . Поэтому будем полагать $\hat{S}^{(n)} \rightarrow \infty$ при $\tilde{S} > 1/4$.

Обобщая выше рассмотренные случаи, приходим к следующим утверждениям.

Утверждение 2.3.1. Итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал» сходится к следующему предельному значению:

$$\hat{S}^* = \begin{cases} \hat{S}_1^*, & \text{если } \tilde{S} \leq 1/4 \text{ и } 0 < \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^*; \\ \hat{S}_2^*, & \text{если } \tilde{S} \leq 1/4 \text{ и } \hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*; \\ \infty, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Утверждение 2.3.2. Итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал» дает следующую оценку для коэффициента разложения:

$$\tilde{\theta}^* = \begin{cases} \frac{1}{1 + \hat{S}_1^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{S} \leq \frac{1}{4} \text{ и } 0 < \hat{S}^{(0)} < S_2^*; \\ \frac{1}{1 + S_2^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{S} \leq \frac{1}{4} \text{ и } \hat{S}^{(0)} = S_2^*; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Алгоритм (2.3.5) можно назвать **квазиоптимальным оцениванием** коэффициентов разложения, так как в нем вместо оптимальной величины отношения «шум/сигнал» (см. выражение (2.2.13)) используется ее оценка – предельные точки итерационной процедуры (2.3.1). Делая замену общего обозначения $\tilde{\theta}$ на конкретный коэффициент разложения $\tilde{a}_{J,k}$ или $\tilde{d}_{j,k}$, получаем соответствующие квазиоптимальные коэффициенты $\hat{a}_{J,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$ вейвлет-разложения. Сглаженную функцию с такими коэффициентами обозначим как $\hat{f}^*(x)$, а сам алгоритм вейвлет-фильтрации с коэффициентами $\hat{a}_{J,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$ будем называть **квазиоптимальным с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал»**.

Очевидно, что «хороший» алгоритм фильтрации должен обеспечивать сходимость сглаженной функции $\hat{f}^*(x)$ к точной функции $f(x)$ (которая имеет соответствующее вейвлет-представление) при стремлении уровня шума к нулю. Определим такую сходимость следующим пределом:

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{f}) &= M \left[\left\| \hat{f} - f \right\|^2 \right] = \\ &= M \left[\int_R (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из выражения (2.2.14) видно, что оптимальные оценки (2.2.12) обеспечивают эту сходимость и при достаточно малых σ^2 , величина СКО сглаживания имеет порядок σ^2 . Покажем сходимость функций $\hat{f}^*(x)$ с квазиоптимальными коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$.

Утверждение 2.3.3. Если «стартовая» (для итерационной процедуры уточнения) функция $\hat{f}^{(0)}(x)$ с коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^{(0)}$, $\hat{d}_{j,k}^{(0)}$ сходится к функции $f(x)$ при $\sigma^2 \rightarrow 0$, т.е.

$$M \left[\left\| \hat{f}^{(0)} - f \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (2.3.6)$$

то имеет место сходимость

$$M \left[\left\| \hat{f}^* - f \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (2.3.7)$$

Доказательство. Вернемся к обозначениям $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}^*$, \hat{S}_1^* , \hat{S}_2^* и заметим, что для сходимости (2.3.7) необходимо и достаточно выполнение предельных соотношений:

$$\lim \hat{S}_1^* = 0 \text{ и } \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^* \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (2.3.8)$$

Если имеет место сходимость (2.3.6), то справедливы выражения:

$$\hat{S}^{(0)} \geq \tilde{S}; \quad \lim \hat{S}^{(0)} = 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим предельное поведение корней \hat{S}_1^* , \hat{S}_2^* при $\tilde{S} \rightarrow 0$. При достаточно малых значениях \tilde{S} справедливо представление

$$(1 - 4\tilde{S})^{1/2} = 1 - 2\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4 - 28\tilde{S}^5 - \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \hat{S}_1^* &= \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} - (1 - 4\tilde{S})^{1/2}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4}{2\tilde{S}} = 0.\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

По аналогии можно доказать предел

$$\begin{aligned}\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \hat{S}_2^* &= \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} + (1 - 4\tilde{S})^{1/2}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{2 - 4\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3}{2\tilde{S}} = \infty.\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

Из существования пределов (2.3.9), (2.3.10) и условий (2.3.8) следует сходимость (2.3.7).

Очевидно, что в качестве функций $\hat{f}^{(0)}(t)$ могут быть приняты либо «исходная» функция $\tilde{f}(t)$, либо предварительно сглаженная функция, которая имеет сходимость (2.3.6).

Замечание 2.3.1. Построенный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации относится к классу локальных – для каждого коэффициента разложения вычисляется свой фильтрующий множитель $\frac{1}{1 + \hat{S}^*}$. ♦

Замечание 2.3.2. Для вычисления нулевого отношения $\hat{S}^{(0)} = \frac{\sigma^2}{(\hat{\theta}^{(0)})^2}$ и отношения $\tilde{S} = \frac{\sigma^2}{(\tilde{\theta})^2}$ необходимо задать дисперсию σ^2 . Как правило, на практике σ^2 неизвестна и поэтому используется оценка:

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{\text{median}(|d_{1,k}|)}{0.6745} \right]^2, \quad (2.3.11)$$

где оператор $\text{median}(|d_{1,k}|)$ вычисляет медиану абсолютных величин коэффициентов первого уровня (объем выборки равен $N/2$). Эта оценка получена из оценки среднеквадратического отклонения, используемой в робастных алгоритмах регрессионного анализа. Приведем результаты некоторых вычислительных экспериментов по исследованию точности оценки выражения (2.3.11) [18, 21, 60].

В первом эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-3}$ (что соответствовало относительному уровню $\delta_\eta = 0.012$). Далее по 30 различным реализациям $\tilde{d}_{1,k}$ ($N/2 = 1024$) вычислялась оценка (2.3.11) и все значения этой оценки находились в интервале $[0.87 \cdot 10^{-3}, 1.01 \cdot 10^{-3}]$.

Во втором эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-1}$ (что соответствовало $\delta_\eta = 0.12$) и вычисленные значения оценки (2.3.11) находились в интервале $[0.88 \cdot 10^{-1}, 0.97 \cdot 10^{-1}]$. Эти результаты говорят о приемлемой точности оценки (2.3.11). ♦

2.3.2. Исследование квазиоптимального алгоритма фильтрации с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал»

Перейдем к исследованию предлагаемых квазиоптимальных оценок коэффициентов разложения. Очевидно, что замена «точных» отношений «шум/сигнал» $S_{j,k}^a$, $S_{j,k}^d$ на их оценки приводит к увеличению к СКО сглаживания. Поэтому был выполнен следующий вычислительный эксперимент по вейвлет-

фильтрации одномерного дискретного сигнала, точные значения которого представлены на рис. 2.1а. Этот сигнал искажался нормально распределенными случайными числами с нулевым средним и дисперсией, определяемой относительным уровнем шума δ_η (подробнее см. пример 2.1.2). По зашумленным (с различным уровнем шума) данным вычислялись две сглаженные функции (уровень разложения был равен 7):

- оптимальное приближение $\hat{f}_{opt}(t)$ с коэффициентами

$$\hat{d}_{opt_{j,k}};$$

- квазиоптимальное приближение $\hat{f}^*(t)$ с коэффициентами

$$\hat{d}_{j,k}^*;$$

Во всех случаях предполагалось, что дисперсия σ^2 неизвестна и использовалась оценка (2.3.11). В табл. 2.2 приведены средние значения (вычисленные по выборке объемом 50) величины

$$P_{opt} = \frac{\|\hat{f}^* - f\|}{\|\hat{f}_{opt} - f\|},$$

характеризующая относительное увеличение

ошибки сглаживания за счет замены оптимальной оценки $\hat{d}_{opt_{j,k}}$ на квазиоптимальную $\hat{d}_{j,k}^*$ при обработке одной реализации случайного вектора \tilde{f} , т.е. для каждой реализации $\tilde{f}^{(l)}$ вычислялось значение $P_{opt}^{(l)}$, а затем по выборке определялось среднее значение \bar{P}_{opt} .

Таблица 2.2

δ_η	0.001	0.005	0.010	0.050	0.100
\bar{P}_{opt}	1.041	1.052	1.087	1.149	1.231

Из табл. 2.2 видно, что использование квазиоптимальных оценок вместо оптимальных увеличивает ошибку сглаживания, однако это увеличение не очень велико, особенно, при малом уровне шума исходного сигнала.

Возникает вопрос: *можно ли предложенный алгоритм оценивания коэффициентов разложения использовать для сжатия сигналов?* Для ответа на этот вопрос введем в рассмотрение коэффициент сжатия $K_{СЖ} = \frac{N - N_{\text{ненул}}}{N}$, где $N_{\text{ненул}}$ – общее количество ненулевых (максимальных) коэффициентов вейвлет-разложения, используемых при реконструкции сигнала (обратное вейвлет-преобразование) и обратимся к табл. 2.3. В этой таблице приведены разные значения $N_{\text{ненул}}$, соответствующие коэффициенты сжатия и относительные ошибки фильтрации (относительная погрешность исходных данных $\delta_\eta = 0.12$). Видно, что предложенный алгоритм обеспечивает разумный компромисс между величинами ошибки сглаживания и коэффициента сжатия.

Таблица 2.3

Предложенный алгоритм	Количество ненулевых коэффициентов			
	50	100	150	200
0.934	0.976	0.951	0.927	0.902
0.041	0.064	0.055	0.066	0.073

Предложенные квазиоптимальные оценки коэффициентов вейвлет-разложений не требуют задания «точных» коэффициентов разложения или их характеристик и позволяют построить приближения с ошибкой сглаживания, не существенно превышающие ошибку фильтрации оптимального алгоритма, нереализуемого на практике. Для краткости алгоритм фильтрации с квазиоптимальными оценками коэффициентов разложения будем называть *квазиоптимальный алгоритм фильтрации 1*. Этот алгоритм также можно использовать при сжатии сигналов. Он допускает простое обобщение на задачи фильтрации изображений.

2.4. Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации

Рассматривается построение квазиоптимального алгоритма, по структуре аналогичного винеровскому оптимальному алгоритму. В предлагаемом алгоритме оценивание неизвестного отношения «шум/сигнал» для каждого коэффициента осуществляется на втором этапе по сигналу, полученному в результате квазиоптимальной фильтрации зашумленного сигнала на первом этапе.

2.4.1. Эмпирический винеровский алгоритм вейвлет-фильтрации

Запишем в обобщенном виде оптимальный *фильтрующий множитель* (см. п. 2.2):

$$\omega_{opt} = \frac{1}{1+S}, \quad (2.4.1)$$

где обобщенное отношение «шум/сигнал» S определяется выражением

$$S = \frac{\sigma^2}{\theta^2}, \quad (2.4.2)$$

а θ – значение коэффициента разложения «точного» (не зашумленного) сигнала. Тогда *оптимальная оценка* для соответствующего коэффициента разложения имеет вид

$$\hat{\theta}_{opt} = \frac{1}{1+S} \tilde{\theta}, \quad (2.4.3)$$

где $\tilde{\theta}$ – коэффициент разложения «зашумленного» сигнала. Заметим, что при $S \rightarrow \infty$ имеют место следующие предельные значения:

$$\omega_{opt} = 0, \quad \hat{\theta}_{opt} = 0. \quad (2.4.4)$$

В так называемом *эмпирическом алгоритме вейвлет-фильтрации* вместо неизвестного «точного» коэффициента θ берется «зашумленный» коэффициент разложения $\tilde{\theta}$ и тогда получаем следующие характеристики алгоритма:

$$\tilde{S} = \sigma^2 / \tilde{\theta}^2 \quad \text{и} \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{1 + \tilde{S}}. \quad (2.4.5)$$

Ранее (см. п. 2.1) показано, что вычисленный по зашумленному сигналу коэффициент разложения $\tilde{\theta}$ можно представить в виде

$$\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon, \quad (2.4.6)$$

где ε – случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Тогда из (2.4.5) видно, что $\tilde{S} = \sigma^2 / (\theta + \varepsilon)^2$ уже является случайной величиной и при $\sigma^2 \rightarrow \infty$ среднее значение \tilde{S} не будет стремиться к ∞ , а, следовательно, и $\tilde{\omega}$ также не будет стремиться к 0, т.е. не выполняются требования выражения (2.4.4).

Для иллюстрации этого важного факта на рис. 2.5 приведены кривые: 1 – значения оптимального фильтрующего множителя (2.4.1); 2 – значения фильтрующего множителя $\tilde{\omega}$ (2.4.5) при разных значениях отношения «шум/сигнал» S . Видно, что среднее значение $\tilde{\omega}$ (вычисленное по выборке объемом 400) при увеличении S стремится к постоянной величине (примерно 0.35), в то время как оптимальный фильтрующий множитель стремиться к нулю.

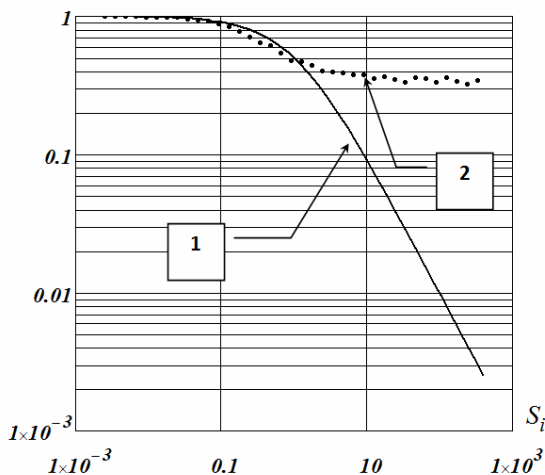


Рис. 2.5. Значения фильтрующих множителей

Следовательно, эмпирический алгоритм вейвлет-фильтрации имеет существенный недостаток: *при отношении «шум/сигнал» больше 1 фильтрующие множители $\tilde{\omega}$ не осуществляют эффективную фильтрацию шума, и результат такой фильтрации имеет СКО фильтрации значительно большую по сравнению с оптимальным (винеровским) алгоритмом вейвлет-фильтрации.*

2.4.2. Двухэтапный алгоритм вейвлет-фильтрации

Предположим, что вместо точного (но неизвестного) коэффициента θ_i в формуле (2.4.2) будет использоваться некоторая оценка $\hat{\theta}_i$ этого коэффициента. Возникает вопрос: насколько увеличится СКО фильтрации при использовании эмпирического отношения «шум/сигнал»:

$$\hat{S} = \frac{\sigma^2}{\hat{\theta}^2}. \quad (2.4.7)$$

Можно показать, что СКО фильтрации (2.2.8) (обозначим как Δ) при использовании (2.4.7) можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_{opt} + \Delta_{emp}, \quad (2.4.8)$$

где

$$\Delta_{opt} = \sum_i \frac{S_i}{1+S_i} \theta_i^2 \quad (2.4.9)$$

– СКО фильтрации оптимального фильтра и сумма вычисляется по всем коэффициентам разложения с соответствующими отношениями «шум/сигнал»;

$$\Delta_{emp} = \sum_i \theta_i^2 \cdot (1+S_i) \cdot \left[\frac{1}{1+\hat{S}_i} - \frac{1}{1+S_i} \right]^2 \quad (2.4.10)$$

– дополнительная (эмпирическая) СКО, обусловленная заменой точного отношения S на эмпирическое \hat{S} . Очевидно, что, если $\hat{S} = S$, то $\Delta_{emp} = 0$.

Вывод: чем точнее будет оценка $\hat{\theta}_i$ коэффициента разложения θ_i , тем меньше будет величина Δ_{emp} и меньше будет суммарная СКО фильтрации (2.4.8).

Для получения более точной оценки $\hat{\theta}$ (по сравнению с $\tilde{\theta}$) в работе [44] был предложен алгоритм (названный *эмпирическим винеровским фильтром*), суть которого можно выразить следующими этапами.

Этап 1. Используя дискретное ортогональное вейвлет-преобразование (матричное обозначение W_1) вычисляется вектор коэффициентов разложения $\tilde{\theta}$, т.е. $\tilde{\theta} = W_1 \tilde{f}$. Затем, используя пороговый алгоритм обработки $P(\tilde{\theta})$ вычисляется вектор «отфильтрованных» коэффициентов разложения $\hat{\theta}_1 = P(\tilde{\theta})$. После этого берется обратное вейвлет-преобразование W_1^{-1} и получается вектор \hat{f}_1 отфильтрованных значений, вычисление которого в матричном виде представимо как

$$\hat{f}_1 = W_1^{-1} \cdot P(\tilde{\theta}) \cdot W_1 \tilde{f} = W_1^{-1} \hat{\theta}_1. \quad (2.4.11)$$

Этап 2. К вектору \hat{f}_1 применяется дискретное вейвлет преобразование W_2 , которое отличается от W_1 . Например, если в качестве W_1 использовались вейвлеты Добеши $Daub(8)$, то в качестве W_2 можно использовать $Daub(16)$ или $Daub(4)$. Таким образом, вычисляется вектор коэффициентов разложения

$$\hat{\theta}_{21} = W_2 \hat{f}_1. \quad (2.4.12)$$

По проекциям этого вектора (предполагается, что $\hat{\theta}_{21}$ является более точной оценкой по сравнению с $\tilde{\theta}$) вычисляются фильтрующие множители

$$\omega_{2_i} = \frac{\hat{\theta}_{21_i}^2}{\hat{\theta}_{21_i}^2 + \sigma^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\hat{\theta}_{21_i}^2}} = \frac{1}{1 + \hat{S}_{2_i}} \quad (2.4.13)$$

и находятся новые «отфильтрованные» (в пространстве вейвлет-преобразования W_2) коэффициенты разложения

$$\hat{\theta}_{2_i} = \frac{\hat{\theta}_{2_i}^2}{\hat{\theta}_{2_i}^2 + \sigma^2} \tilde{\theta}_{2_i} = \frac{1}{1 + \hat{S}_{2_i}} \tilde{\theta}_{2_i}, \quad (2.4.14)$$

где $\tilde{\theta}_{2_i}$ – коэффициенты разложения $\hat{\theta}_2 = W_2 \tilde{f}$.

В завершении этапа 2 вычисляется вектор $\hat{f}_2 = W_2^{-1} \hat{\theta}_2$, содержащий результат фильтрации описанным алгоритмом.

В дальнейшем изложенный алгоритм будем называть *двух-этапным алгоритмом вейвлет-фильтрации*, что в большей степени соответствует сути алгоритма по сравнению с зарубежным названием *эмпирический винеровский фильтр*.

На рис. 2.6 приведена блок-схема этого алгоритма, которая графически интерпретирует описанные два этапа фильтрации. Блок P обозначает обработку зашумленных коэффициентов разложения на первом этапе; блок P_B – вычисление оценки (2.4.14) на втором этапе.

Если обозначить через N_T – число ненулевых коэффициентов $\hat{\theta}_1$, вычисленных на первом этапе, то суть описанного двух-ступенчатого алгоритма заключается в том, что дискретное преобразование $W_{21} = W_2 W_1^{-1}$ трансформирует («растягивает») N_T коэффициентов в N ($N > N_T$) коэффициентов $\hat{\theta}_{21}$, которые используются для построения оценок ω_2 оптимальных фильтрующих множителей ω_{opt} на втором этапе.

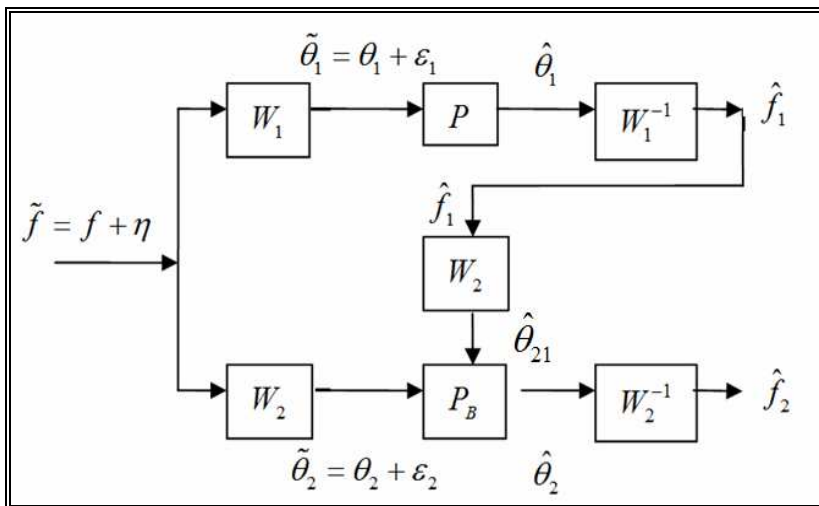


Рис. 2.6. Блок-схема двухэтапного алгоритма фильтрации

Возникает вопрос: как построить на первом этапе сигнал \hat{f}_1 , имеющий СКО фильтрации меньше, чем СКО исходного (зашумленного) сигнала \tilde{f} . В работе [44] оценка \hat{f}_1 строилась с использованием порогового алгоритма вейвлет-фильтрации с пороговой величиной $UNIV$ (подробно рассмотренного в главе 3), имеющего более высокую СКО фильтрации по сравнению с квазиоптимальным алгоритмом фильтрации, изложенного в п. 2.3 (это будет показано в главе 3). Поэтому попробуем использовать этот алгоритм для вычисления вектора \hat{f}_1 [26]. Для этого в записи алгоритма

$$\hat{f}_1 = W_1^{-1} \cdot P(\tilde{\theta}) \cdot W_1 \tilde{f}.$$

под оператором обработки $P(\tilde{\theta})$ зашумленных коэффициентов разложения $\tilde{\theta}$ будем подразумевать алгоритм (2.3.4), который вычисляет квазиоптимальные значения коэффициентов разложения (обозначаются как $\hat{\theta}^*$). Этим коэффициентам соответствует вектор $\hat{f}_1^* = W_1^{-1} \cdot \hat{\theta}_1^*$ – результат выполнения первого этапа. Второй этап выполняется в строгом соответствии с описанным выше (т.е. с выражениями (2.4.12), (2.4.13), (2.4.14)).

2.4.3. Результаты вычислительного эксперимента

Для исследования эффективности описанного двухэтапного алгоритма вейвлет-фильтрации (на первом этапе строится вектор \hat{f}_1^*) был выполнен вычислительный эксперимент вейвлет-фильтрации разных по форме сигналов. Остановимся на некоторых его результатах.

В качестве тестового одномерного сигнала был взят дискретный сигнал (число отсчетов $N = 2048$), точные значения которого представлены на рис. 2.1 а). Выбор такой формы сигнала обусловлен присутствием в его спектре высокочастотных составляющих, что существенно затрудняет фильтрацию высокочастотного (не коррелированного) шума из-за наложения спектров сигнала и шума.

Этот сигнал искажался нормально распределенными случайными числами с нулевым средним и дисперсией, определяемой относительным уровнем шума δ_η (подробнее см. пример 2.1.2). По зашумленным (с различным уровнем шума) данным вычислялись две сглаженные функции (уровень разложения был равен 7):

- \hat{f}_{opt} – оптимальная (винеровская) вейвлет-фильтрация $Daub(8)$ с оптимальными фильтрующими множителями (2.2.11);

- \hat{f}_2^* – результат двухэтапной вейвлет-фильтрация (в качестве оценки первого этапа \hat{f}_1 брался вектор \hat{f}_1^*), $W_2 = Daub(4)$).

Во всех случаях предполагалось, что дисперсия σ^2 неизвестна и использовалась оценка (2.3.11). В табл. 2.4 приведены средние значения $\bar{P}_{opt}^* = \sum_{l=1}^{50} P_{opt}^{*(l)}$ (вычисленные по выборке объ-

емом 50) случайной величины $P_{opt}^{*(l)} = \frac{\|\hat{f}_2^{*(l)} - f\|}{\|\hat{f}_{opt}^{(l)} - f\|}$, характеризую-

щей относительное увеличение ошибки фильтрации за счет замены оптимальной оценки коэффициента разложения θ_{opt} на квазиоптимальную $\hat{\theta}_2^*$, при этом величина $P_{opt}^{*(l)}$ вычислялась для каждой зашумленной реализации $\tilde{f}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 50$.

Таблица 2.4

δ_η	0.001	0.005	0.010	0.050	0.100
\bar{P}_{opt}^*	1.029	1.048	1.072	1.138	1.220

Сравнивая данные этой таблицы с данными табл. 2.2 можно сделать вывод о небольшом уменьшении ошибки фильтрации при использовании двухэтапного алгоритма вейвлет-фильтрации по сравнению с квазиоптимальным алгоритмом 1 (итерационным уточнением «шум\сигнал» (см. п. 2.3)). Такое незначительное уменьшение ошибки можно отчасти объяснить тем, что отфильтрованный (квазиоптимальным алгоритмом 1) сигнал \hat{f}^* уже имел ошибку фильтрацию, близкую к ошибке оптимального алгоритма фильтрации и поэтому сигнал \hat{f}_2^* уже не может иметь значительно меньшую ошибку фильтрации по

сравнению с сигналом \hat{f}^* , которая была бы меньше ошибки оптимального (винеровского) алгоритма. Учитывая это обстоятельство, будем называть изложенный двухэтапный алгоритм *квазиоптимальным алгоритмом фильтрации 2*.

Заметим, что в работе [44] на первом этапе использовался пороговый алгоритм вейвлет-фильтрации с порогом $UNIV$ (см. п. 3.2), который имеет ошибку фильтрации больше, чем \hat{f}^* и поэтому сигнал \hat{f}_2 (результат фильтрации на втором этапе) имеет значительно меньшую ошибку по сравнению с \hat{f}_1 – результатом фильтрации на первом этапе. Однако окончательная ошибка фильтрации вектора \hat{f}_2 выше, чем у вектора \hat{f}_2^* – результат фильтрации квазиоптимальным алгоритмом фильтрации 2.

Обобщая содержание этой главы, можно сделать **следующие выводы:**

Определены статистические характеристики случайных ошибок вычисления коэффициентов разложения (в базисе ортогональных вейвлет-функций) зашумленных сигналов и изображений, которые существенно используются при построении алгоритмов вейвлет-фильтрации.

Построен оптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации, имеющий наименьшую среднеквадратическую ошибку фильтрации (при выбранном базисе вейвлет-функций), однако требующий знания коэффициентов разложения не зашумленного сигнала (или изображения), которые входят в отношение «шум/сигнал» и которые на практике неизвестны.

Предложены два квазиоптимальных алгоритма вейвлет-фильтрации, не требующие задания такой априорной информации и реализуемые на практике, но имеющие ошибку фильтрации выше, чем оптимальный алгоритм. Увеличение

ошибки наблюдается при относительном уровне шума порядка 10 и более процентов и может составлять 20–25 % по сравнению с ошибкой оптимального алгоритма.

*Все изложенные алгоритмы имеют характерную особенность (которая в зарубежной литературе получила название *shrinkage*) – «отфильтрованные» коэффициенты разложения получают умножением «зашумленных» коэффициентов на фильтрующий множитель, принимающий значение в интервале $[0,1]$. Для вычисления этого множителя используется, как правило, отношение «шум/сигнал» или оценка этого отношения.*