

## Глава 3. ПОРОГОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрены алгоритмы вейвлет-фильтрации, в которых оценки для детализирующих коэффициентов вейвлет-разложения вычисляются с использованием пороговых функций. Эти функции обращают в нуль (заноляют) относительно малые коэффициенты, сохраняя или преобразуя только коэффициенты, которые больше некоторой величины (называемой порогом).

### 3.1. Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации

Приводится описание часто используемых пороговых функций и обсуждаются алгоритмы выбора пороговых величин.

#### *3.1.1. Пороговые алгоритмы фильтрации с однопараметрическими пороговыми функциями*

Теоретической основой построения пороговых оценок служат следующие предпосылки:

- только небольшое число детализирующих коэффициентов  $d_{j,k}$  разложения точной функции уровней  $j = 1, 2, 3$  отличны по модулю от нуля;
- особенно сильному влиянию шума измерения подвергаются детализирующие коэффициенты уровней разложения  $j = 1, 2, 3$ .
- уровень ошибок вычисления коэффициентов разложения достаточно мал по сравнению с коэффициентами разложения точной функции, что позволяет «распознать» две ситуации: «шумовой коэффициент» или «информативный коэффициент».

Хорошей иллюстрацией этих предпосылок являются примеры 2.1.1 (относительные ошибки вычисления коэффициентов) и 2.1.2.

Таким образом, *необходимо обратить в нуль шумовые коэффициенты разложения, которые обусловлены только шумом измерения, сохранив при этом коэффициенты разложения точной функции* (такие коэффициенты выше были названы информативными).

В определенной (но не в полной степени) этому требованию удовлетворяют *пороговые алгоритмы* оценивания коэффициентов разложения, которые в зарубежной литературе получили название *thresholding* [40–42]. В этих алгоритмах наиболее часто используются две пороговые функции:

- «жесткая» пороговая функция вида

$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda; \end{cases} \quad (3.1.1)$$

- «мягкая» пороговая функция вида

$$T_S(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d}) \cdot \left[ |\tilde{d}| - \lambda \right]_+, \quad (3.1.2)$$

где обозначение  $[z]_+$  определяется как

$$[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0; \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Графики этих функций приведены на рис. 3.1 (функция  $T_H(\tilde{d}, \lambda)$  обозначена сплошной линией, функция  $T_S(\tilde{d}, \lambda)$  – точечной).

Кроме приведенных пороговых функций, на практике используются (но гораздо реже) и другие функции [38, 43], которые будут рассмотрены позже.

Величина порога  $\lambda$  выполняет роль «управляющего» параметра, влияющего на ошибку фильтрации. Критичность его выбора иллюстрируется примером 2.1.2. При заниженном значении  $\lambda$  часть шумовых коэффициентов разложения не зануляются

и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т.е. функция не достаточно сглажена. При завышенном пороге  $\lambda$  зануляются информативные коэффициенты и результат фильтрации оказывается переглаженным.

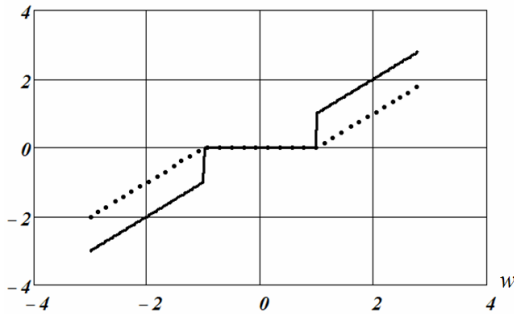


Рис. 3.1. Графики пороговых функций

**Пример 3.1.1.** Для зашумленной функции примера 2.1.1 (см. рис. 2.2а) необходимо установить зависимость ошибки фильтрации от величины  $\lambda$  пороговых алгоритмов оценивания коэффициентов разложения (см. формулы 3.1.1), (3.1.2)). Относительная ошибка исходных данных  $\delta_\eta = 0.12$ .

*Решение.* В качестве меры точности фильтрации примем

относительную ошибку  $\delta_f(\lambda) = \frac{\|\hat{f}_\lambda - f\|}{\|f\|}$ , где  $\hat{f}_\lambda$  – вектор, со-

ставленный из значений отфильтрованной функции при заданной величине порога  $\lambda$ ;  $f$  – вектор значений точной функции (размерность  $N = 2048$ ). На рис. 3.2 приведены графики функции  $\delta_f(\lambda)$  для жесткой пороговой функции (сплошная кривая) и мягкой (точечная кривая). По оси абсцисс откладывалась ве-

личина  $\lambda/\sigma$ . Видно наличие минимума у этих двух зависимостей, но положение точек минимума не совпадают. Левая ветвь (от точки минимума) обусловлена преобладанием случайной ошибки фильтрация (функция не доглажена), правая ветвь – систематической ошибкой (функция переглажена). ☹

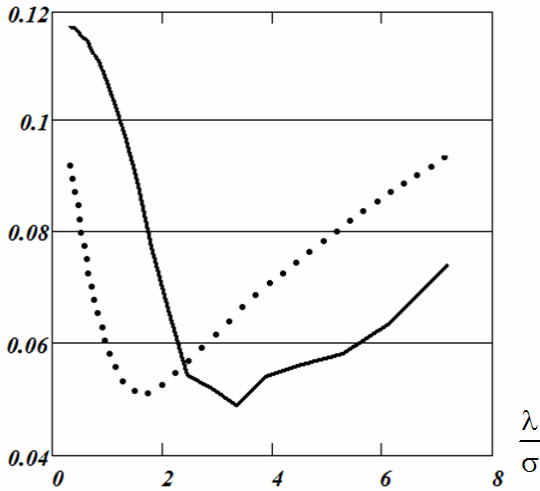


Рис. 3.2. Зависимость ошибки фильтрации от параметра  $\lambda$

Возникает вопрос: какая пороговая функция предпочтительнее для фильтрации шумов? Однозначный ответ дать затруднительно, но дополнительно проведенный вычислительный эксперимент позволяет отметить следующие особенности пороговых функций *hard* и *soft*:

- функция *hard* приемлемо работает при низком уровне шума, когда все шумовые коэффициенты разложения по модулю меньше порога  $\lambda$  и они соответственно зануляются, а все информативные превосходят по модулю порог  $\lambda$  и поэтому они сохраняются;

- из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину  $\lambda$  в функции *soft* возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала;

- отсутствие в функции *soft* разрыва в окрестности точки  $\lambda$  (см. рис. 3.1) в определенной степени предотвращает появление осцилляций (эффекта Гиббса) в особых точках сигнала. Этот эффект может проявиться при использовании пороговой функции *hard*;

- функция *soft* используется при оценивании коэффициента разложения методом максимума апостериорной вероятности при предположениях: а) ошибка вычисления коэффициента разложения подчиняется нормальному распределению; б) точный коэффициент разложения имеет распределение Лапласа (априорное распределение).

Кроме этих двух рассмотренных функций, используется еще одна однопараметрическая пороговая функция (в зарубежной литературе названная *garrote*) вида [43]:

$$T_G(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d} - \frac{\lambda^2}{\tilde{d}}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

На рис. 3.3 изображен график (сплошная кривая) этой функции при  $\lambda = 2$ . Видно, что отсутствует скачок в окрестности точки  $\tilde{d} = \lambda$  (свойство функции *soft*), но в то же время нет смещения на величину  $\lambda$  при больших значениях  $\tilde{d}$  (свойство функции *hard*). Таким образом, функция *garrote* свободна от тех существенных недостатков, которые были присущи *hard* и *soft*. На рис. 3.3 точками обозначена прямая, проведенная под углом  $45^\circ$  к оси абсцисс.

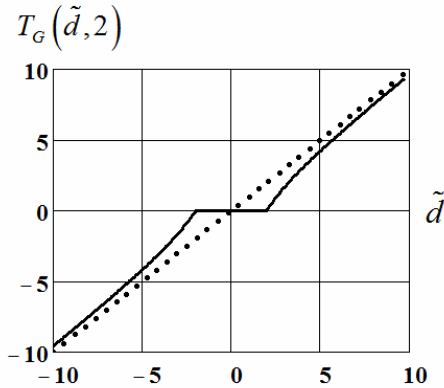


Рис. 3.3. График пороговой функции *garrote*

Однако заметим, что все-таки решающее влияние на величину ошибки фильтрации оказывает величина порога  $\lambda$  рассмотренных пороговых функций (это хорошо иллюстрирует рис. 3.2). При этом величина  $\lambda$  может быть одинаковой для всех уровней разложения зашумленного сигнала (*глобальное значение пороговой величины*) или определяется для каждого уровня  $j$ -го уровня разложения (*локальное значение пороговой величины*). При фильтрации изображений пороговые значения могут быть различными даже для каждой из матриц  $H_j, V_j, D_j$   $j$ -го уровня разложения. Более того, некоторые пороговые величины  $\lambda$  рекомендуется использовать только с определенными пороговыми функциями (с *hard*, но более всего с *soft*).

Для подтверждения этого тезиса о существенном влиянии пороговой величины на точность вейвлет-фильтрации определим среднеквадратическую ошибку фильтрации при использовании пороговой функции *hard*. Можно показать, что в этом случае СКО фильтрации определяется выражением (справедливым для ортогональных вейвлетов):

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M \left[ \left\| \hat{f}_\lambda - f \right\|^2 \right] = M \left[ \left\| \varepsilon_\lambda \right\|^2 \right] = \\ &= M \left[ \sum_{i=1}^N \varepsilon_{\lambda_i}^2 \right] = \sum_{i=1}^N M \left[ \varepsilon_{\lambda_i}^2 \right], \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где  $\varepsilon_{\lambda_i}$  – ошибка оценивания  $i$ -го коэффициента разложения, участвующего в фильтрации сигнала. Величина  $M \left[ \varepsilon_{\lambda_i}^2 \right]$  допускает следующее представление

$$M \left[ \varepsilon_{\lambda_i}^2 \right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } |\tilde{d}_i| > \lambda; \\ d^2, & \text{если } |\tilde{d}_i| \leq \lambda, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия шума (погрешности) измерения.

Заметим, что верхняя ветвь в выражении (3.1.6) определяет величину случайной ошибки отфильтрованного сигнала, нижняя ветвь – систематическую ошибку. Тогда с учетом (3.1.5) можно сделать вывод: при увеличении пороговой величины возрастает систематическая ошибка и уменьшается случайная ошибка. При уменьшении  $\lambda$  наблюдается обратная картина. Очевидно, что если бы были априори известны коэффициенты разложения  $d_i$  точного сигнала  $f$ , то можно решить вариационную задачу

$$\min_{\lambda} \left[ \Delta(\lambda) \right] \quad (3.1.7)$$

и вычислить  $\lambda_{opt}$ , доставляющее минимум  $\Delta(\lambda)$ . Однако на практике такая информация отсутствует и поэтому приходится ограничиваться только некоторым алгоритмом выбора, который позволяет с приемлемой точностью оценить  $\lambda_{opt}$ .

Для выбора порога  $\lambda$  в литературе предложено несколько алгоритмов, большая часть из которых рассматривается далее.

### 3.1.2. Реализация пороговых алгоритмов в пакете MathCAD

Программная реализация алгоритма вейвлет-фильтрации с задаваемым порогом  $\lambda$  в виде подпрограмм-функций приведена в *приложении*.

**Обращение к подпрограммам-функциям** имеет вид:

$$D1\_Filter\_H(f_\eta, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet);$$

$$D1\_Filter\_S(f_\eta, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet).$$

#### **Формальные параметры:**

$f_\eta$  – одномерный массив длиной  $N = 2^{j_0}$ , содержащий зашумленные значения функции;

$\lambda$  – задаваемое значение порога;

$J_{fil}$  – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

$J_{wav}$  – уровень разложения в базисе вейвлет-функции (необходимо выполнения неравенства  $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$ );

$wavelet$  – задает имя семейства вейвлет-функций. Например, задав  $daublet(8)$ , имеем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8.

*Результатом работы* является массив длиной  $N$ , содержащий сглаженные значения функции.

Заметим, что в этих подпрограммах-функциях использовались функции MathCAD, описанные в п. 1.3.3, находящиеся в файле *Wavedef*, который входит в состав пакета *Wavelet Extension* системы компьютерной математики MathCAD14.

В подпрограммах-функциях  $D1\_Filter\_H$ ,  $D1\_Filter\_S$ , приведенных в *приложении*, порог  $\lambda$  одинаков для всех уровней разложения (т.е. задается глобальное значение порога).



## 3.2. Выбор параметра пороговой функции

Рассматриваются наиболее часто используемые алгоритмы выбора пороговой величины в однопараметрических пороговых функциях.

### 3.2.1. Универсальный порог (UNIV-порог)

Этот порог предложен в работах [40–42] и определяется для каждого  $j$ -го уровня разложения (т.е. является локальным порогом) следующим выражением:

$$\lambda_j^{UNIV} = \sigma \sqrt{2 \ln N_j}, \quad (3.2.1)$$

где  $N_j$  – число детализирующих коэффициентов на  $j$ -м уровне разложения. Таким образом, чем выше уровень разложения, тем меньше величина порога. Теоретическим обоснованием такого выбора может служить утверждение 3.2.1 [41, 42].

**Утверждение 3.2.1.** Предположим, что  $f(x)$  является кусочным полиномом на интервале  $[0, 1]$ . Тогда оптимальная величина порога  $\lambda_{opt}$  функции *soft*, минимизирующая СКО фильтрации

$$\Delta(\lambda) = M \left[ \left\| \hat{f}_\lambda - f \right\|^2 \right] \quad (3.2.2)$$

при  $N \rightarrow \infty$  имеет порядок

$$\lambda_{opt} \approx \sigma \sqrt{2 \ln N}. \quad \clubsuit \quad (3.2.3)$$

В *приложении* приведен фрагмент документа MathCAD, содержащий текст подпрограммы-функции *D1\_Filter\_Univ*, которая осуществляет вейвлет-фильтрацию одномерного сигнала с универсальным порогом  $\lambda_j$  (3.2.1). Обращение имеет вид:

$$D1\_Filter\_Univ(f_\eta, J_{fil}, J_{wav}, wavelet, Num).$$

**Формальные параметры:**

$f_\eta$  – одномерный массив длиной  $N = 2^{j_0}$ , содержащий зашумленные значения функции;

$J_{fil}$  – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

$J_{wav}$  – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнения условия  $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$ );

*wavelet* – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав *daublet(8)*, получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

*Num* – задает вид пороговой функции: если  $Num = 1$ , то функция *hard*; если  $Num > 1$ , то функция *soft*.

*Результатом работы* является массив данной  $N$ , содержащий отфильтрованные значения функции.

**Внимание!** Значение среднеквадратического отклонения  $\sigma$ , входящего в выражение (3.2.1), оценивается внутри описанной подпрограммы-функции.

Вернемся к формуле (3.2.1), которая получена из условия минимума СКО формулы (3.2.2) при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. носит асимптотический характер. На практике величина  $N$  конечна и во многих случаях не превосходит несколько сотен. Поэтому возникает вопрос: насколько оптимален универсальный порог  $\lambda_j^{UNIV}$ ? Для ответа на этот вопрос был проведен вычислительный эксперимент, описанный в следующем примере.

**Пример 3.2.1.** Для зашумленной функции примера 2.1.1 с относительными ошибками  $\delta_\eta = 0.12$  и  $\delta_\eta = 0.025$  установить значение  $\beta_{opt}$  величины  $\beta$ , входящей в выражение

$$\lambda_j^\beta = \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln N_j}, \quad (3.2.4)$$

при котором достигается минимум относительной ошибки фильтрации  $\delta_f(\beta) = \frac{\|\hat{f}_\beta - f\|}{\|f\|}$ , где  $\hat{f}_\beta$  – значение сглаженной функции при заданном значении  $\beta$  в формуле (3.2.4).

*Решение.* Для вычисления  $\beta_{opt}$  были заданы 20 значений  $\beta$  из интервала  $[0.1, 2]$  и при этих значениях вычислялись относительные ошибки фильтрации. На рис. 3.4а приведены значения этих ошибок при использовании пороговой функции *soft*: сплошная кривая –  $\delta_\eta = 0.12$ ; точечная кривая –  $\delta_\eta = 0.023$ . На рис. 3.4б приведены ошибки для пороговой функции *hard* с сохранением тех же обозначений. Значения координат экстремальных точек приведены в табл. 3.1.

Анализ табл. 3.1 показывает, что для функции *soft* необходимо более чем в два раза уменьшить получаемые по формуле (3.1.4) значения  $\lambda_j^{UNIV}$ , чтобы получить минимальные ошибки. Для функции *hard* уменьшение значения  $\lambda_j^{UNIV}$  незначительно.

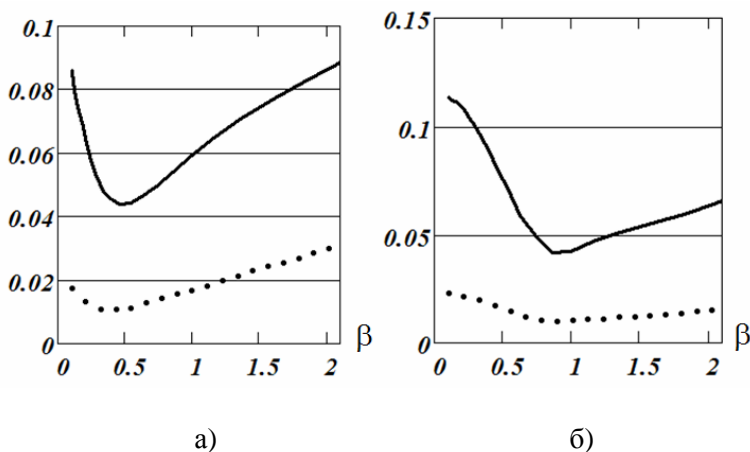
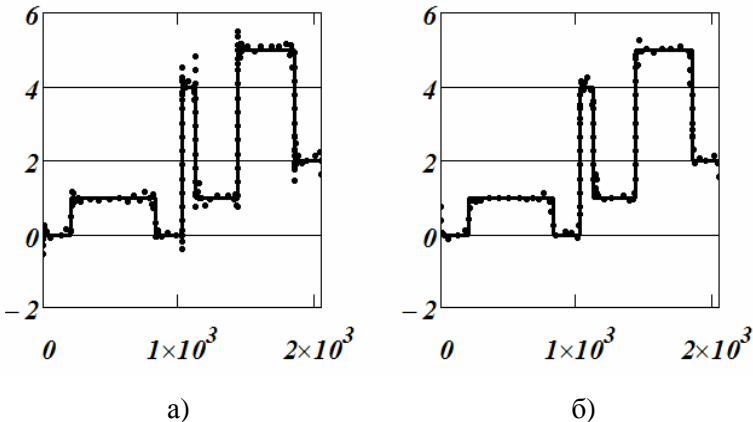


Рис. 3.4. Графики относительной ошибки фильтрации

Таблица 3.1

	Функция <i>soft</i>		Функция <i>hard</i>	
	$\delta_\eta = 0.025$	$\delta_\eta = 0.12$	$\delta_\eta = 0.025$	$\delta_\eta = 0.12$
$\beta_{opt}$	0.401	0.463	0.857	0.851
$\delta_f(\beta_{opt})$	0.010	0.043	0.010	0.041

Это хорошо иллюстрирует рис. 3.5, на котором приведены значения отфильтрованных функций (уровень шума  $\delta_\eta = 0.12$ ): рис. 3.5а – с использованием функции *soft*; рис. 3.5б – с использованием функции *hard*. Для обеих функций  $\beta = 1$ , т.е. использовались пороговые значения  $\lambda_j^{UNIV}$  (см. формулу (3.2.1)). Завышенные значения  $\lambda_j^{UNIV}$  функции *soft* (по сравнению с оптимальными) обусловили обнуление части информативных коэффициентов разложения, а это в свою очередь увеличило уровень систематической ошибки отфильтрованного сигнала (проявление эффекта Гиббса в особых точках сигнала (см. рис. 3.5а)). ☹

Рис. 3.5. Фильтрация сигнала при  $\lambda_j = \lambda_j^{UNIV}$

Заметим, что порог  $\lambda_j^{UNIV}$  можно использовать и с функцией *hard*, и с функцией *soft*. По-видимому, это обстоятельство и определило название порога – *универсальный*. Хотя проведенный вычислительный эксперимент примера 3.2.1 показал предпочтительность функции *hard*.

Если порог функции *soft* одинаков для всех уровней разложения (т.е. глобальный порог), то такая модификация в англоязычной литературе получила название *VisuShrink* и пороговая величина определяется выражением

$$\lambda^{UNIV} = \sigma \sqrt{2 \ln N},$$

где  $N$  – число отсчетов фильтруемого сигнала. При фильтрации некоторых одномерных сигналов этот порог дает меньшую ошибку фильтрации по сравнению с порогами  $\lambda_j^{UNIV}$ , вычисляемыми для каждого уровня разложения.

### 3.2.2. SURE-порог

Это пороговое значение было предложено в работах [39, 67]. Идея заключается в нахождении величины  $\lambda$ , минимизирующей несмещенную оценку риска Стейна (SURE – *Stein's Unbiased Risk Estimation*). Оценка риска для  $j$ -го уровня разложения в случае  $\sigma^2 = 1$  определяется выражением

$$SURE_j(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[ \min(|\tilde{d}_{j,k}|, \mu) \right]^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} If(|\tilde{d}_{j,k}| \leq \mu), \quad (3.2.5)$$

где *If* (условие) – условная функция, принимающая значение 1, если условие выполняется, и значение 0 – в противном случае;  $N_j$  – число коэффициентов  $j$ -го уровня разложения. Если  $\sigma^2 \neq 1$ , то оценка риска имеет вид

$$\begin{aligned}
SURE_j(\mu) &= N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[ \min \left( \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \mu \right) \right]^2 - \\
&- 2 \sum_{k=1}^{N_j} \text{If} \left( \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \leq \mu \right).
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Пороговое значение на  $j$ -м уровне разложения определяется выражением

$$\lambda_j^{SURE} = \sigma \cdot \mu_j^{SURE}, \tag{3.2.7}$$

где  $\mu_j^{SURE}$  – значение  $\mu$ , доставляющее минимум функционалу (3.2.6). Рекомендуется пороговую величину  $\lambda_j^{SURE}$  использовать для функции *soft*.

В работе [42] для пороговой функции *soft* показано, что при выполнении условия

$$\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left[ \left( \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \leq \frac{(\log_2 N_j)^{3/2}}{\sqrt{N_j}}$$

предпочтительнее вместо  $\lambda_j^{SURE}$  использовать универсальный порог  $\lambda_j^{UNIV}$ . Такое объединение двух пороговых величин в одну процедуру оценивания коэффициентов  $j$ -го уровня разложения получило в зарубежной литературе обозначение *SureShring*.

Для выбора величины глобального порога (т.е. одна пороговая величина для всех уровней разложения) можно использовать следующую оценку риска:

$$SURE(\lambda) = \sigma^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \min \left( |\tilde{d}_{j,k}|, \lambda \right) \right]^2 - 2 \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=1}^N \text{If} \left( |\tilde{d}_{j,k}| \leq \lambda \right)$$

и тогда пороговая величина  $\lambda^{SURE}$  определяется из условия минимума функционала  $SURE(\lambda)$ , т.е.

$$\lambda^{SURE} = \arg \min SURE(\lambda). \quad (3.2.8)$$

### 3.2.3. FDR-порог

Применимо к задаче вычисления пороговой величины метод FDR (*False Discovery Rate*) был рассмотрен в работах [37, 53]. Пусть даны  $N_j$  коэффициентов  $\tilde{d}_{j,k}$  на  $j$ -м уровне разложения. Первоначально вычислим  $p$ -величины для каждого коэффициента  $\tilde{d}_{j,k}$ :

$$p_k = 2 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \right) \right], \quad (3.2.9)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения нормированной нормально распределенной случайной величины  $N(0, 1)$ :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt. \quad (3.2.10)$$

Величину  $p_k$  можно трактовать как вероятность попадания случайной величины  $x \sim N(0, 1)$  в интервал  $\left[ \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \infty \right)$ . Далее из величин  $p_k$  формируем вариационный ряд:

$$p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(N_j-1)} \leq p_{(N_j)}. \quad (3.2.11)$$

Затем, начиная с  $k = 1$ , находим индекс  $m$ , как наибольшее из тех значений  $k$ , для которых выполняется неравенство

$$p_{(k)} \leq \frac{k}{N_j} \cdot q, \quad (3.2.12)$$

где величина  $q$  задается, как правило, равной 0.2, и ее можно трактовать как среднее значение доли коэффициентов разложения, ошибочно используемых в обратном вейвлет-преобразовании (т.е. при построении отфильтрованной функции). Тогда порог, который будем обозначать как  $\lambda_j^{FDR}$ , определяется выражением

$$\lambda_j^{FDR} = \sigma \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{P_{(m)}}{2} \right). \quad (3.2.13)$$

Пороговую величину  $\lambda_j^{FDR}$  можно использовать для функций *hard*, *soft*.

#### 3.2.4. Bayes-порог

Этот порог рекомендуется использовать с пороговой функцией *soft*. Он определяется выражением [35, 36, 49]

$$\lambda_j^B = \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}_{d_j}}, \quad (3.2.14)$$

где  $\hat{\sigma}_{d_j}$  – оценка среднеквадратического отклонения точных детализирующих коэффициентов  $j$ -го уровня разложения, вычисляемая по формуле

$$\hat{\sigma}_{d_j} = \left[ \max \left( \sigma_{\tilde{d}_j}^2 - \sigma^2, 0 \right) \right]^{1/2}. \quad (3.2.15)$$

Дисперсия  $\sigma_{\tilde{d}_j}^2$  зашумленных коэффициентов разложения  $j$ -го уровня, определяется по формуле

$$\sigma_{\tilde{d}_j}^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.2.16)$$



В ситуации, когда  $\sigma_{\tilde{d}_j}^2 \leq \sigma^2$ , имеем  $\lambda_j^B = \infty$  и все байесовские оценки

$$\hat{d}_{j,k}^B = \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j^B) \quad (3.2.17)$$

на  $j$ -м уровне разложения равны нулю.

Величину порога (3.2.14) в зарубежных публикациях часто называют *BayesShrink*.

**Замечание 3.2.1.** Строго говоря, байесовская пороговая величина была получена для пороговой функции *soft*, но может использоваться и для функции *hard*. ♦

**Замечание 3.2.2.** Все приведенные выше алгоритмы выбора пороговой величины требуют задания дисперсии шума измерения  $\sigma^2$ . Если дисперсия неизвестна, то рекомендуется обратиться к оценке (2.3.11). ♦

### 3.2.5. GVC-порог

На протяжении трех десятилетий для выбора параметра регуляризации при построении регуляризованных решений некорректных задач широко используется метод перекрестной значимости (*cross validation method*) [2, 10, 12, 17]. Этот метод применяется для выбора параметра сглаживания при построении сглаживающих сплайнов [2, 45] и для определения параметра сглаживания в алгоритмах Фурье-фильтрации [19]. Вариации этого метода для выбора порога в алгоритмах вейвлет-фильтрации были предложены в работах [50, 51].

Величина порога  $\lambda^{GCV}$  является одинаковой для всех уровней разложения (т.е. глобальная пороговая величина) и определяется из условия минимума функционала:

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{N} \|\tilde{f} - \hat{f}_\lambda\|^2}{\left[ \frac{N_0(\lambda)}{N} \right]^2}, \quad (3.2.18)$$

где  $N_0(\lambda)$  – число коэффициентов разложения  $\tilde{d}_{j,k}$ , которые меньше порога  $\lambda$ , т.е. эти значения при обработке пороговыми функциями зануляются.

Вычисление функционала (3.2.18) можно полностью осуществить в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения зашумленного сигнала, а именно:

- для пороговой функции *soft*

$$GCV(\lambda) = \frac{N}{N_0^2(\lambda)} \left[ \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2 + (N - N_0(\lambda))\lambda^2 \right]; \quad (3.2.19)$$

- для пороговой функции *hard*

$$GCV(\lambda) = \frac{N}{N_0^2(\lambda)} \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.2.20)$$

Запись  $\sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,r}^2$  обозначает суммирование только тех ко-

эффициентов  $\tilde{d}_{j,k}$ , которые по модулю меньше  $\lambda$ . Как правило, порог  $\lambda^{GCV}$  используется для функции *soft* и поэтому в дальнейшем будем пользоваться выражением (3.2.19).

Заметим, что при  $\lambda > 0$  функционал  $GCV(\lambda)$  является непрерывным (по аргументу  $\lambda$ ) и для нахождения точки минимума  $\lambda^{GCV}$  функционала (3.2.19) можно использовать известные

методы минимизации нулевого порядка (например процедуру Фибоначчи).

**Пример 3.2.2.** Для сигнала, точные значения которого изображены на рис. 2.1а, вычислить зависимости  $GCV(\lambda)$  и  $\delta_f(\lambda)$  для двух уровней шума 0.023 и 0.12.

*Решение.* Для 60 значений  $\lambda$  из интервала  $[0.001, 60]$  вычислим сглаженную функцию (пороговая функция *soft*), найдем относительную ошибку фильтрации и определим значение функционала  $GCV(\lambda)$ . На рис. 3.6а показаны графики  $GCV(\lambda)$  (точечная кривая) для относительного уровня шума  $\delta_\eta = 0.023$ , а на рис. 3.6б –  $\delta_\eta = 0.12$ . Видно, что точка минимума  $GCV(\lambda)$  находится в области минимума относительной ошибки фильтрации (на рисунках сплошная кривая). Аналогичная картина наблюдается и для *hard* (рис. 3.7). Таким образом, пороговые значения  $\lambda^{GCV}$  можно использовать в алгоритмах вейвлет-фильтрации. ☺

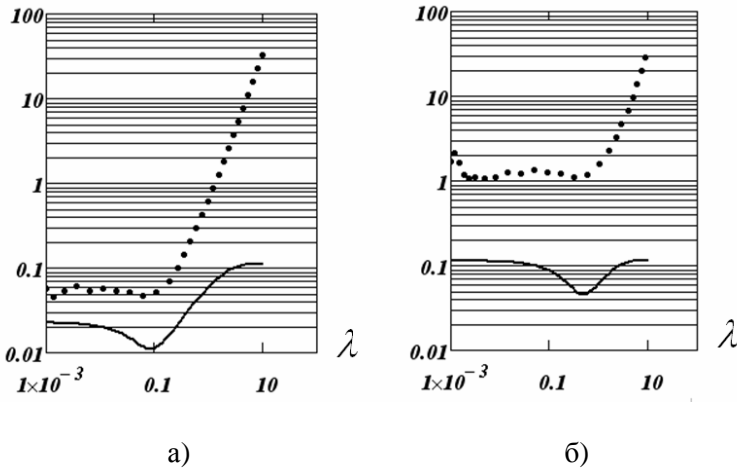


Рис. 3.6. Графики функционала  $GCV(\lambda)$  для функции *soft*

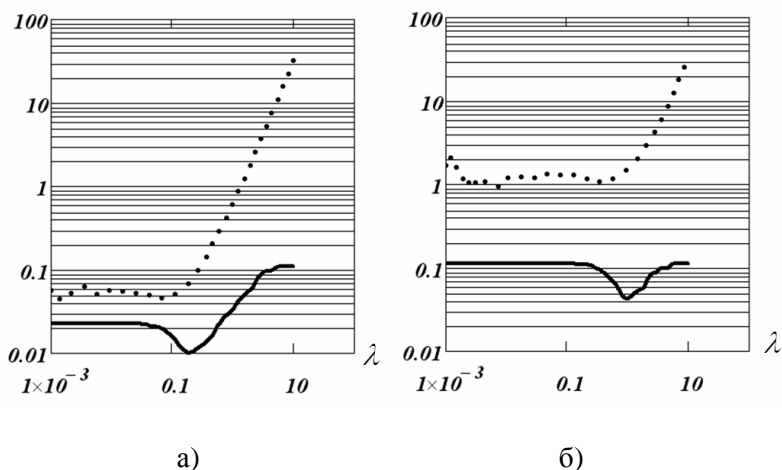


Рис. 3.7. Графики функционала  $GCV(\lambda)$  для функции *hard*

К преимуществам метода перекрестной значимости следует отнести отсутствие задания дисперсии  $\sigma^2$ . Недостатками являются:

- пологая левая ветвь графика функционала  $GCV(\lambda)$  и наличие нескольких локальных минимумов существенно усложняют вычисление  $\lambda^{GCV}$  численными методами;
- даже небольшая корреляция соседних проекций вектора шума  $\eta$  (коэффициент корреляции по модулю 0.2 и выше) приводит к существенному уменьшению пороговых величин  $\lambda_j^{GCV}$ , что вызывает неполное сглаживание шума алгоритмами вейвлет-фильтрации.

Отмеченные недостатки не лишают метод перекрестной значимости права использовать его для вычисления пороговых значений как основного, так и альтернативного метода в алгоритмах вейвлет-фильтрации.

Можно сказать, что определенным недостатком изложенного варианта метода *GCV* также является вычисление глобальной пороговой величины. Это можно преодолеть задав зависимость локальных порогов от одного параметра, который можно вычислить используя метод *GCV*. Например,

$$\lambda_j(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (3.2.21)$$

где параметр  $\beta$  будет вычисляться исходя из минимума функционала

$$GCV(\beta) = \frac{\frac{1}{N} \|\tilde{f} - \hat{f}_\beta\|^2}{\left[ \frac{N_0(\beta)}{N} \right]^2}, \quad (3.2.22)$$

где  $N_0(\beta)$  – число коэффициентов разложения  $\tilde{d}_{j,k}$ , которые при обработке пороговыми функциями зануляются.

Вычисление функционала (3.2.22) можно полностью осуществить в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения зашумленного сигнала (так же, как и функционала (3.2.18)), а именно:

- для пороговой функции *soft*

$$GCV(\beta) = \frac{N}{N_0^2(\beta)} \left[ \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda_j} \tilde{d}_{j,k}^2 + (N_j - N_0(\lambda_j)) \lambda_j^2 \right] \right]; \quad (3.2.23)$$

- для пороговой функции *hard*

$$GCV(\beta) = \frac{N}{N_0^2(\beta)} \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda_j} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.2.24)$$

Запись  $\sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda_j} \tilde{d}_{j,k}^2$  обозначает суммирование только тех коэффициентов  $\tilde{d}_{j,k}$ , которые по модулю меньше порога  $\lambda_j$ ,  $N_j$  – общее число обрабатываемых коэффициентов разложения на  $j$ -м уровне,  $N_0(\lambda_j)$  – число коэффициентов на  $j$ -м уровне, которые меньше порога  $\lambda_j$  (и поэтому зануляемых).

Как правило, порог  $\lambda^{GCV}$  используется для функции *soft* и поэтому в дальнейшем будем пользоваться выражениями (3.2.19) или (3.2.23).

Сравнение приведенных алгоритмов выбора пороговых величин по ошибке фильтрации будет выполнено позже (см. п. 3.3.4).

### 3.3. Выбор пороговых значений на основе критерия оптимальности

#### 3.3.1. Критерий оптимальности линейного алгоритма фильтрации

Этот критерий был использован для выбора параметра сглаживания в линейных алгоритмах Фурье-фильтрации (см. например, [19]) и для выбора параметра регуляризации в линейных регуляризирующих алгоритмах решения некорректных задач (например [2, 4, 12, 17, 54]). Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации в общем случае не являются линейными. Однако попытаемся использовать этот критерий для нахождения пороговой величины  $\lambda$ .

Кратко изложим основные положения этого критерия.

Используя векторные обозначения, представим результат фильтрации алгоритмом  $T$  (матричный оператор соответствующей размерности) в виде

$$\hat{f}_T = T\tilde{f}, \quad (3.3.1)$$

а среднеквадратическую ошибку фильтрации такого алгоритма определим функционалом

$$\Delta(T) = M \left[ \left\| \hat{f}_T - f \right\|^2 \right], \quad (3.3.2)$$

где  $f$  – вектор, составленный из значений не зашумленной функции (вектор точных значений). Требуется определить оптимальный оператор сглаживания  $T_{opt}$ , доставляющий минимум  $\Delta(T)$  среди всех других линейных операторов сглаживания вида (3.3.1). Без доказательства (оно имеется в монографии [19, с. 39–41]) приведем следующее утверждение, в котором используются обозначения:  $V_e(T) = M \left[ e_T e_T^T \right]$  – матрица вторых моментов случайного вектора невязки  $e_T = \tilde{f} - \hat{f}_T$ ;  $E(T) = I - T$  – оператор невязки, позволяющий представить  $e_T$  в виде  $e_T = E(T) \tilde{f}$ ,  $V_\eta = M \left[ \eta \eta^T \right]$  – ковариационная матрица случайного вектора шума измерения  $\eta$ .

**Утверждение 3.3.1.** Необходимым и достаточным условием оптимальности линейного оператора фильтрации  $T$ , строящего  $\hat{f}_T = T \tilde{f}$ , где  $\tilde{f} = f + \eta$ , является матричное тождество

$$V_e(T) = V_\eta E^T(T), \quad (3.3.3)$$

где  $V_\eta$  – ковариационная матрица вектора  $\eta$ . ♣

Заметим, что в это условие *не входит априорная информация о неизвестном векторе  $f$  в виде матрицы вторых моментов  $V_f = f f^T$  вектора  $f$ .*

Соотношение (3.3.3) трудно использовать для априорного построения оптимального оператора фильтрации  $T_{opt}$ , так как оно включает вектор невязки, определяемый по построенному оператору  $T$ . Однако его можно использовать для ответа на вопрос: *оптимален или нет построенный оператор фильтра-*

ции  $T$ ? Поэтому соотношение (3.3.3) можно рассматривать как *критерий оптимальности фильтрующего оператора  $T$* .

Применение изложенного выше критерия оптимальности для вычисления  $\lambda_{opt}$  параметрического оператора фильтрации  $T(\lambda)$  (фильтрующие свойства которого зависят от некоторого параметра  $\lambda$ ) связано с двумя трудностями.

*Во-первых*, оценка матрицы вторых моментов  $V_e(\lambda)$ , вычисленная по одной реализации вектора невязки  $e_\lambda = \tilde{f} - \hat{f}_\lambda = \tilde{f} - T(\lambda)\tilde{f}$ , непригодна для проверки тождества (3.3.3) из-за малой точности оценивания.

*Во-вторых*, в силу параметризации оператора  $T$  условие (3.3.3) становится только достаточным. Действительно, найдется величина  $\lambda$ , доставляющая минимум СКО, но при этом  $\lambda$  не будет точно выполняться тождество (3.3.3). Следовательно, целесообразно в качестве  $\lambda_{opt}$  взять такое значение  $\lambda_w$ , при котором принимается основная статистическая гипотеза:

$$H_0 : V_e(\lambda) = V_\eta E^T(\lambda). \quad (3.3.4)$$

В качестве альтернативной гипотезы примем

$$H_1 : V_e(\lambda) \neq V_\eta E^T(\lambda). \quad (3.3.5)$$

Эта гипотеза принимается, если невыполнение тождества (3.3.4) обусловлено не случайными ошибками, возникающими из-за оценивания  $V_e(\lambda)$  по одной реализации, а систематическими, обусловленными не оптимальностью параметра сглаживания. Таким образом, значение  $\lambda_w$  можно рассматривать как оценку оптимального параметра сглаживания  $\lambda_{opt}$ .

Для проверки гипотезы (3.3.4) введем статистику [2, 4, 10, 12]

$$\rho_w(\lambda) = e_\lambda^T [V_\eta E^T(\lambda)]^{-1} e_\lambda. \quad (3.3.6)$$



Существование матрицы  $[E^T(\lambda)]^{-1}$  позволяет переписать  $\rho_w(\lambda)$  в виде

$$\rho_w(\lambda) = \tilde{f}^T V_n^{-1} e_\lambda. \quad (3.3.7)$$

В качестве оценки для оптимального параметра сглаживания  $\lambda_{opt}$  принимается значение  $\lambda_w$ , при котором случайная величина

$$\rho_w(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{f}_i e_{\lambda_i}}{\sigma^2} \quad (3.3.8)$$

попадает в интервал

$$\left[ \vartheta_{\frac{\gamma}{2}, N}, \vartheta_{1-\frac{\gamma}{2}, N} \right], \quad (3.3.9)$$

где  $e_{\lambda_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\lambda_i}$  –  $i$ -я проекция вектора невязки  $e_\lambda$ ,  $\vartheta_{\frac{\gamma}{2}, N}, \vartheta_{1-\frac{\gamma}{2}, N}$  – квантили  $\chi^2$ -распределения с числом степеней свободы  $N$  уровней  $\frac{\beta}{2}, 1-\frac{\beta}{2}$  соответственно (обычно вероятность ошибки первого рода  $\beta = 0.05$ );  $N$  – число измеренных значений  $\tilde{f}_i$ .

### 3.3.2. Выбор глобального порога на основе критерия оптимальности

Первоначально рассмотрим оценивание глобального порога  $\lambda$  (т.е. одной пороговой величины для всех уровней разложения) на основе критерия оптимальности.

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлет-функций статистика  $\rho_w(\lambda)$  (см. формулу (3.3.8)) вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложений [21, 61]:

- для функции *soft*

$$\rho_w(\lambda) = \frac{\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - T_S(\tilde{d}_{j,k}; \lambda))}{\sigma^2}; \quad (3.3.10)$$

- для функции *hard*

$$\rho_w(\lambda) = \frac{\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - T_H(\tilde{d}_{j,k}; \lambda))}{\sigma^2}. \quad (3.3.11)$$

В качестве оценки для оптимальной величины  $\lambda_{opt}$  (при которой СКО фильтрации пороговыми алгоритмами минимальна) примем значение  $\lambda_w$ , при котором  $\rho_w(\lambda)$  попадает в интервал (3.3.9).

**Замечание 3.3.1.** Если  $N > 30$ , то границы интервала (3.3.9) при  $\beta = 0.05$  можно вычислить по формулам:

$$\vartheta_{0.25,N} = N - 1.96\sqrt{2N}, \quad \vartheta_{0.975,N} = N + 1.96\sqrt{2N}. \quad \blacklozenge \quad (3.3.12)$$

**Пример 3.3.1.** Для сигнала, точные значения которого изображены на рис. 2.1а, вычислить зависимости  $\rho_w(\lambda)$  и  $\delta_f(\lambda)$  для двух уровней шума 0.023 и 0.12 и пороговой функции *soft*.

*Решение.* Для 60 значений  $\lambda$  из интервала [0.001, 60] вычислим сглаженную функцию (пороговая функция *soft*), найдем относительную ошибку фильтрации  $\delta_f(\lambda) = \|\hat{f}_\lambda - f\|/\|f\|$  и определим значение  $\rho_w(\lambda)$ . На рис. 3.8а показаны графики  $\rho_w(\lambda)$  (точечная кривая) для относительного уровня шума  $\delta_\eta = 0.023$ , а на рис. 3.8б –  $\delta_\eta = 0.12$ . Здесь же показаны (штриховыми линиями) границы интервала (3.3.9), которые вычислялись по фор-

мулам (3.3.12). Видно, что значения  $\lambda$ , при которых  $\rho_w(\lambda)$  попадает в интервал (3.3.9) (т.е. значения  $\lambda_w$ ) соответствуют минимуму относительной ошибки фильтрации (на рис. 3.8 сплошная кривая). Таким образом, пороговые значения  $\lambda_w$  являются хорошими оценками для  $\lambda_{opt}$ . ☺

Заметим, что вычисление  $\lambda_w$  сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_w(\lambda) = m, \quad (3.3.13)$$

где для одномерного сигнала  $m = N$  – число значений фильтруемого сигнала. Однако итерационный процесс прекращается, как только  $\rho_w(\lambda^{(n)})$  попадает в интервал (3.3.9). Число итераций, необходимых для этого, гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью  $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$ . Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии – деление отрезка пополам).

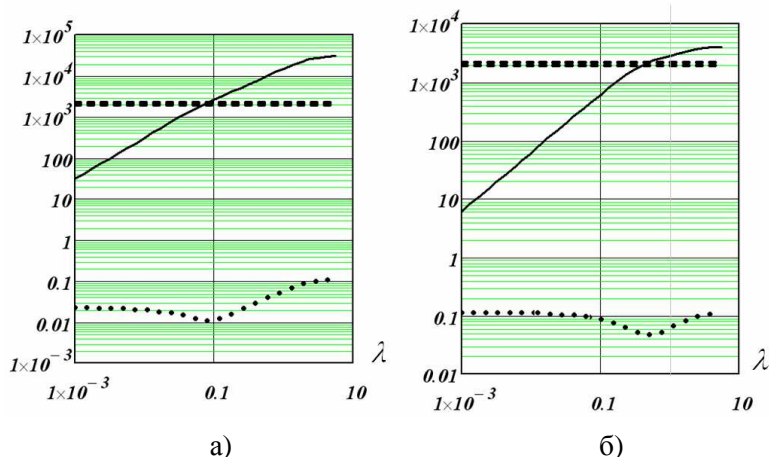


Рис. 3.8. Графики функционала  $\rho_w(\lambda)$  для функции *soft*

### 3.3.3. Выбор локальных пороговых величин на основе критерия оптимальности

Учитывая асимптотическую оптимальность универсального порога  $\lambda_j^U$ , величину локального порога на каждом  $j$ -м уровне разложения будем задавать выражением [19, 21]:

$$\lambda_j(\beta) = \beta \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)} = \beta \cdot c_j. \quad (3.3.14)$$

Необходимо построить оценку для величины  $\beta_{opt}$ , которая минимизирует СКО фильтрации при использовании пороговых величин (3.3.14).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов критерий  $\rho_w(\beta)$  вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

- для функции *soft*

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot (\tilde{d}_{j,k} - \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j(\beta)));$$

- для функции *hard*

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot (\tilde{d}_{j,k} - \text{hard}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j(\beta))).$$

В качестве оценки для  $\beta_{opt}$  принимается величина  $\beta_w$ , для которой выполняется неравенство

$$\vartheta_{m,\gamma/2} \leq \rho_w(\beta_w) \leq \vartheta_{m,1-\gamma/2}. \quad (3.3.15)$$

Тогда локальные пороговые величины, вычисленные на основе критерия оптимальности, определяются выражением

$$\lambda_j^w = \beta_w \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)}. \quad (3.3.16)$$

Рассмотрим свойства критерия  $\rho_W(\beta)$ . Выполнив несложные преобразования, можно  $\rho_W(\lambda)$  переписать в виде:

- для функции *soft*

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2 + \beta \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| > \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2 \cdot c_j \right];$$

- для функции *hard*

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2,$$

где запись  $\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2$  означает суммирование только тех

коэффициентов  $\tilde{d}_{j,k}$ , которые по абсолютной величине меньше или равны  $\beta \cdot c_j$ . Видно, что статистика  $\rho_W(\beta)$  для функции *soft* является непрерывной функцией параметра  $\beta$ , в то же время  $\rho_W(\beta)$  для функции *hard* может иметь разрывы первого рода при небольшом числе измерений и небольшом уровне шума.

Заметим, что вычисление  $\beta_W$  сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_W(\beta) = m, \quad (3.3.17)$$

где  $m = N$  – число значений фильтруемого сигнала. Однако итерационный процесс прекращается, как только  $\rho_W(\beta^{(n)})$  попадает в интервал  $[\vartheta_{m,\gamma/2}^{\vartheta}, \vartheta_{m,1-\gamma/2}^{\vartheta}]$ . Количество итераций, необходимых для этого, гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью  $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$ . Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии – деление отрезка пополам).

**Утверждение 3.3.2.** Если

$$\rho_w(\infty) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \vartheta_{m,1-\beta/2}, \quad (3.3.18)$$

где  $\vartheta_{\frac{\gamma}{2}, N}$  – квантиль  $\chi^2$ -распределения с числом степеней свободы  $N$  уровня  $\frac{\gamma}{2}$ , то существует конечное значение  $\beta_w$ , для которого выполняется неравенство (3.3.15).

*Доказательство.* Если выполняется условие (3.3.18), то точка  $\beta = \infty$  может рассматриваться как верхняя граница интервала локализации корня уравнения (3.3.17). Если  $\beta \rightarrow 0$ , то  $\rho_w(\beta) \rightarrow 0$  и  $\beta = 0$  может рассматриваться как нижняя граница интервала локализации. Таким образом, при выполнении условия (3.3.18) обязательно существует хотя бы одно значение  $0 \leq \beta < \infty$ , для которого  $\rho_w(\beta)$  удовлетворяет условию (3.3.15).

Невыполнение условия (3.3.18) означает, что значения  $\tilde{f}_i$  обусловлены только шумом  $\eta_i$ , т.е. значения точной функции  $f(x_i) \equiv 0$ . В этом случае  $\beta_w = \infty$  и сглаженные значения  $\hat{f}_i \equiv 0$ . ♣

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценки  $\beta_w$  для  $\beta_{opt}$  легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы  $m$  (см. формулу (3.3.17)) определяется как  $m = N_x \cdot N_y$ , где  $N_x, N_y$  – размеры фильтруемого изображения.

**Замечание 3.3.2.** Приведенный алгоритм вычисления  $\beta_w$  требует задания дисперсии шума измерения  $\sigma^2$ . Если дисперсия неизвестна, то рекомендуется обратиться к оценке (2.3.11). ♦

### 3.3.4. Результаты вычислительного эксперимента

Для исследования оптимальности построенной оценки  $\beta_w$  был выполнен обширный вычислительный эксперимент по вейвлет-фильтрации сигналов и изображений. Приведем и обсудим только некоторые результаты вейвлет-фильтрации изображений, уделяя также внимание на оптимальность других (рассмотренных в п. 3.2) пороговых величин.

В качестве тестовых изображений были взяты два изображения LENA и TARGET размером  $256 \times 256$  пикселей, приведенных на рис. 3.9.

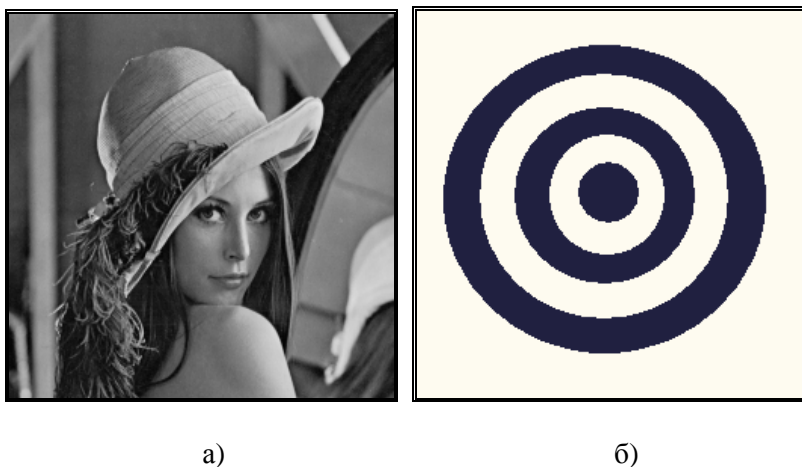


Рис. 3.9. Тестовые изображения:  
а – LENA; б – TARGET

По статистической природе моделируемого шума измерения выполненный вычислительный эксперимент можно условно разделить две серии:

- *Белый шум измерения.* Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$  для всех  $\eta_{i_1, i_2}$  и соседние отсчеты шума не коррелированы друг с другом, т.е. шум измерения являлся «белым».

- *Цветной шум измерения.* Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$  и соседние отсчеты шума коррелированы друг с другом с коэффициентом корреляции 0.2, т.е. шум измерения являлся «цветным».

В экспериментах интенсивность шума задавалась по относительному уровню шума

$$\delta_F = \frac{\|\tilde{F} - F\|}{\|F\|}, \quad (3.3.19)$$

где  $\|\cdot\|$  – обозначает евклидову норму матрицы, а матрицы  $F, \tilde{F}$  размером  $256 \times 256$  пикселей составлены из значений точного и зашумленного изображений соответственно, при этом дисперсия шума  $\sigma^2$  определялась выражением  $\sigma^2 = \left[ \frac{\delta_F \cdot \max(F)}{2} \right]^2$ .

Однако во всех экспериментах при выборе пороговых величин дисперсия  $\sigma^2$  считалась неизвестной (эта ситуация часто имеет место на практике), и она оценивалась с использованием выражения (2.3.11).

Первоначально исследуем свойство оптимальности оценки  $\beta_w$ . Точность фильтрации определим относительной ошибкой:

$$\delta(\beta) = \frac{\|\hat{F}_\beta - F\|}{\|F\|}, \quad (3.3.20)$$

где  $\hat{F}_\beta$  – результат вейвлет-фильтрации с локальными порогами (3.3.14) при заданной величине  $\beta$ . На рис. 3.10 показаны значения  $\rho_w(\beta)$  (кривая 1) для функции *hard* (рис. 3.10а) и функции *soft* (рис. 3.10б), которые были вычислены при вейвлет-фильтрации изображения LENA, искаженного «белым» шумом с относительным уровнем  $\delta_F = 0.10$ .



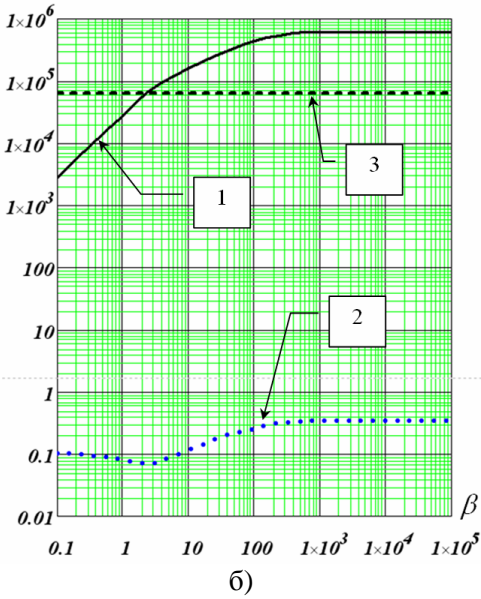
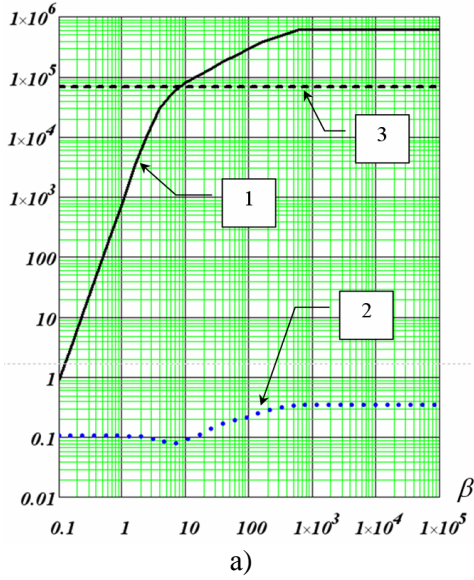


Рис. 3.10. Графики функций  $\rho_w(\beta)$  и  $\delta(\beta)$

На рис. 3.10 показаны значения относительной ошибки фильтрации (кривые 2) и величины  $\vartheta_{m,0.025}, \vartheta_{m,0.975}$  при  $m = 256 \cdot 256 = 65536$  (прямые линии 3), которые из-за масштаба рисунка слились в одну прямую. Видно, что точка пересечения  $\rho_w(\beta)$  с прямой 3 (т.е. значение  $\beta_w$ ) соответствует области минимума относительной ошибки фильтрации  $\delta(\beta)$ .

Следовательно, можно сделать вывод о приемлемой точности оценки  $\beta_w$  для оптимальной величины  $\beta_{opt}$ . Этот вывод также подтверждается приводимыми ниже результатами другого вычислительного эксперимента.

В следующем вычислительном эксперименте сравнивались ошибки вейвлет-фильтрации при использовании четырех пороговых величин:  $\lambda_j^U, \lambda_j^S, \lambda_j^B, \lambda_j^W$  (см. п. 3.2) при трех уровнях шума 0.05, 0.10, 0.15. В качестве критерия точности фильтрации была принята *средняя относительная ошибка* (СОО), определяемая выражением

$$\delta(\hat{F}_\lambda) = M \left[ \frac{\|\hat{F}_\lambda - F\|}{\|F\|} \right], \quad (3.3.21)$$

где математическое ожидание берется по распределению матрицы случайного шума  $\eta$ . Выборочная оценка математического ожидания вычислялась по 30 изображениям  $\hat{F}_\lambda^{(l)}$ , где  $\hat{F}_\lambda^{(l)}$  – результат фильтрации изображения  $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$ ,  $\eta^{(l)}$  –  $l$ -я реализация матрицы шума.

В качестве *минимальной СОО*  $\delta_{\min}$  была принято СОО вейвлет-фильтра с пороговой величиной:

$$\lambda_j^{OPT} = \lambda_j(\beta_{opt}) = \beta_{opt} \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)},$$

в которой оптимальное значение  $\beta_{opt}$  определялось из условия минимума СКО фильтрации для каждой реализации  $\tilde{F}^{(l)}$ . Это возможно так, как в вычислительном эксперименте точное изображение  $F$  известно (оно задается). Очевидно, что на практике такое определение  $\beta_{opt}$  нереализуемо, но  $\delta_{min}$  может служить базовым «ориентиром» при сравнении СОО вейвлет-фильтрации, использующие другие пороговые величины. Для этого определим коэффициент эффективности

$$E = \frac{\delta_{min}}{\delta(\hat{F}_\lambda)}. \quad (3.3.22)$$

Очевидно, чем больше  $E$  отклоняется от единицы в меньшую сторону, тем больше проигрыш по точности соответствующего алгоритма вейвлет-фильтрации по сравнению с алгоритмом вейвлет-фильтрации, использующего оптимальную пороговую величину  $\lambda_j^{OPT}$ .

В табл. 3.1 приведены значения коэффициента эффективности  $E$  для четырех пороговых величин:  $\lambda_j^U$ ,  $\lambda_j^S$ ,  $\lambda_j^B$ ,  $\lambda_j^W$ , используемых при фильтрации изображения LENA. Строки с буквой  $H$  соответствуют функции *hard*, с буквой  $S$  – функции *soft*. Видно, что использование пороговой величины  $\lambda_j^U$  приводит к значительному (в 1.5–2 раза) увеличению СОО (особенно для функции *soft*). Пороги  $\lambda_j^B$ ,  $\lambda_j^S$  также имеют СОО на 10–25 % выше  $\delta_{min}$  (в зависимости от используемой функции *hard* или *soft*), пороговое значение  $\lambda_j^W$  дает самый наименьший проигрыш по точности как при использовании функции *hard*, так и при использовании *soft*.

В табл. 3.2 приведены значения коэффициента эффективности  $E$  при фильтрации изображения TARGET. Анализ данных таблицы позволяет сделать выводы, аналогичные табл. 3.1, но дополнительно следует отметить увеличение СОО при исполь-

зовании байесовского порога  $\lambda_j^B$  (составляет 15–30 %). Лучшие результаты имеет пороговая величина  $\lambda_j^W$ .

Результаты, полученные при фильтрации изображений, искаженных цветным шумом (коэффициент корреляции между соседними значениями шума равен 0.2) характеризуют небольшое уменьшение коэффициента эффективности (порядка 3–8 %), но соотношение коэффициента  $E$  для разных пороговых величин такое же, как и при фильтрации белого шума.

Таблица 3.1

Пороговые величины		Относительный уровень шума		
		0.05	0.10	0.15
$\lambda_j^U$	H	0.681	0.786	0.798
	S	0.444	0.561	0.632
$\lambda_j^S$	H	0.803	0.812	0.814
	S	0.857	0.923	0.946
$\lambda_j^B$	H	0.854	0.859	0.861
	S	0.861	0.855	0.880
$\lambda_j^W$	H	0.928	0.975	0.995
	S	0.991	0.993	0.998

Таблица 3.2

Пороговые величины		Относительный уровень шума		
		0.050	0.100	0.150
$\lambda_j^U$	H	0.725	0.742	0.786
	S	0.443	0.536	0.610
$\lambda_j^S$	H	0.766	0.795	0.782
	S	0.887	0.923	0.936
$\lambda_j^B$	H	0.675	0.721	0.807
	S	0.681	0.723	0.824
$\lambda_j^W$	H	0.906	0.934	0.963
	S	0.966	0.992	0.996

По-видимому, при фильтрации других изображений количественные значения ошибок алгоритмов вейвлет-фильтрации будут другими, но «иерархия» рассмотренных и предложенных пороговых величин по точности фильтрации сохранится. Этот вывод основан на приведенных результатах фильтрации существенно отличающихся изображений – «гладкого» LENA и «контрастного» TARGET. Поэтому в качестве наилучшей пороговой величины в пороговых алгоритмах обработки коэффициентов разложения зашумленных сигналов и изображений, **целесообразно использовать пороговую величину  $\lambda_j^W$ , определяемую выражением (3.3.16) и найденную с использованием критерия оптимальности.**

### 3.3.5. Реализация пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации в MathCAD

В приложении приведен текст подпрограммы-функции  $D1\_Filter\_ \lambda_{all}$ , которая реализует алгоритм вейвлет-фильтрации одномерных сигналов с порогом  $\lambda_w$ , а также тексты программных модулей, используемых  $D1\_Filter\_ \lambda_{all}$ .

**Обращение к подпрограмме-функции  $D1\_Filter\_ \lambda_{all}$**  имеет вид:

$$D1\_Filter\_ \lambda_{all}(f_\eta, J_{fil}, J_{wav}, wav, Num).$$

#### **Формальные параметры:**

$f_\eta$  – одномерный массив длиной  $N = 2^{j_0}$ , содержащий зашумленные значения функции;

$J_{fil}$  – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

$J_{wav}$  – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнение условия  $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$ );

$wav$  – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав  $daublet(8)$ , получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

$Num$  – задает вид пороговой функции: если  $Num = 1$ , то функция *hard*; если  $Num > 1$ , то функция *soft*.

*Результатом работы* является массив данной  $N$ , содержащий отфильтрованные значения функции.

**Внимание!** Значение дисперсии  $\sigma^2$ , входящего в выражения (3.3.10), (3.3.11), оценивается внутри описываемой подпрограммы-функции.

Изложенные алгоритмы вычисления пороговых значений достаточно просто обобщаются для выбора порогов в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений.

### 3.4. Выбор параметров двухпараметрических пороговых функций

Предлагается алгоритм оценивания оптимальных параметров двухпараметрических пороговых функций из условия минимума СКО фильтрации на основе критерия оптимальности, изложенного в п. 3.3.

#### 3.4.1. Пороговые функции с двумя параметрами

Ранее (см. п. 3.1) обсуждались недостатки пороговых функций *hard* и *soft*. Основные из которых:

- в функции *soft* из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину  $\lambda$  возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала, особенно при больших  $\lambda$ ;

- в функции *hard* наличие разрыва в окрестности точки  $\lambda$  в определенной степени обуславливает появление осцилляций (эффекта Гиббса) в особых точках сигнала.

Для преодоления этих недостатков в литературе (например, [38]) были предложены *двухпараметрические функции*, среди которых наиболее часто упоминается пороговая функция вида

(в зарубежной литературе она получила название *firm* или *semi-soft*):

$$T_F(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1; \\ \text{sign}(\tilde{d}) \frac{\lambda_2 (|\tilde{d}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2; \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

которая включает уже две пороговые величины  $\lambda_1, \lambda_2$ . График этой функции приведен на рис. 3.11 (сплошная линия). Для сравнения с однопараметрическими пороговыми функциями здесь же приведены графики функции *hard* (штриховой график) и функции *soft* (точечный график).

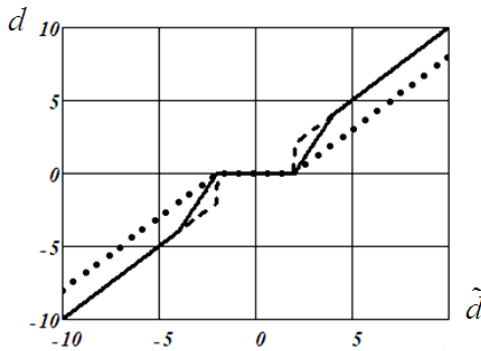


Рис. 3.11. Графики пороговых функций

Из графика видно, что в пороговой функции *firm* отсутствуют (в определенной степени) недостатки функций *hard*, *soft*. Предпочтительный выбор функции *firm* обусловлен также ее лучшими статистическими характеристиками. Так в работе [38], была получена аналитическая зависимость величины средне-квадратической ошибки

$$R_\lambda(\theta) = M \left[ (T_\lambda(\tilde{\theta}) - \theta)^2 \right], \quad (3.4.2)$$

как функции оцениваемого коэффициента разложения, если зашумленный (обрабатываемый) коэффициент  $\tilde{\theta}$  имеет нормальное распределение  $\tilde{\theta} \sim N(\theta, 1)$ . В верхнем ряду рис. 3.12 приведены графики пороговых функций, а в нижнем – соответствующие графики  $R_\lambda(\theta)$ . При этом задавались следующие пороговые величины: функция *hard* –  $\lambda = 3.312$ ; *soft* –  $\lambda = 2.045$ ; *firm* –  $\lambda_1 = 2.331, \lambda_2 = 7.259$ .

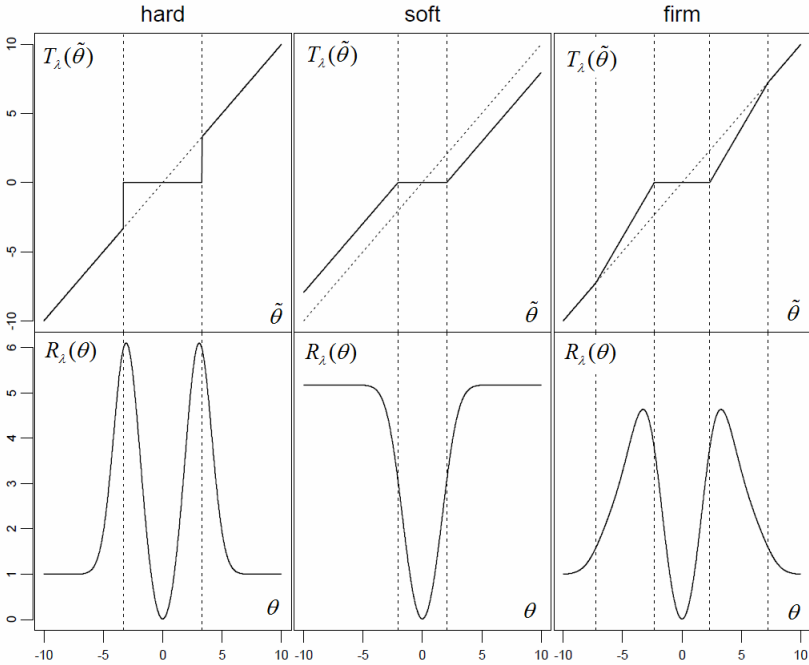


Рис. 3.12. Графики пороговых функций и функций  $R_\lambda(\theta)$



Анализ графиков показывает:

- влияние формы пороговой функции на характер и величину ошибки  $R_\lambda(\theta)$ ;
- функция *firm* имеет меньшие значения ошибки  $R_\lambda(\theta)$ .

Все это позволяет сделать вывод о предпочтительности использования пороговой функции *firm* при построении пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации.

Однако функция *firm* включает две пороговые величины  $\lambda_1, \lambda_2$ , которые играют роль управляющих параметров, существенно влияющих на ошибку фильтрации. При заниженных значениях  $\lambda_1, \lambda_2$  часть шумовых коэффициентов разложения не зануляются и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т.е. функция не достаточно сглажена. При завышенных порогах  $\lambda_1, \lambda_2$  зануляются информативные коэффициенты и результат фильтрации оказывается переглаженным.

#### 3.4.2. Выбор двух пороговых величин на основе критерия оптимальности

Заметим, что для двухпараметрических пороговых функций в литературе (как отечественной, так и зарубежной) отсутствовали алгоритмы выбора порогов  $\lambda_1, \lambda_2$ , позволяющие с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги  $\lambda_{opt1}, \lambda_{opt2}$ , которые минимизируют СКО фильтрации. Для решения задачи оценивания  $\lambda_{opt1}, \lambda_{opt2}$  в пионерских работах [22, 63] был успешно использован критерий оптимальности. Следуя этой работе, приведем основные построения алгоритма оценивания  $\lambda_{opt1}, \lambda_{opt2}$ .

Перейдем к оцениванию оптимальных порогов функции (3.4.1). По аналогии с порогом (3.3.14) представим  $\lambda_1, \lambda_2$  в виде

$$\lambda_1(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}; \quad (3.4.3)$$

$$\lambda_2(\beta, C) = \beta \cdot C \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (3.4.4)$$

где множитель  $C > 1$  следует из неравенства  $\lambda_2 > \lambda_1$  для функции (3.4.1). Таким образом, следует построить оценки  $\beta_w, C_w$  для оптимальных значений  $\beta_{opt}, C_{opt}$ , при которых СКО фильтрации минимальна. Введем критерий

$$\rho_w(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{(\beta, C)i} \cdot \tilde{f}_i, \quad (3.4.5)$$

где  $e_{(\beta, C)i}$  – проекции вектора невязки  $e_{(\beta, C)} = \tilde{f} - \hat{f}_{(\beta, C)}$ ;  $\hat{f}_{(\beta, C)}$  – вектор фильтрованных значений, вычисленных с использованием порогов (3.4.3), (3.4.4). В качестве оценок для соответствующих оптимальных порогов примем такие значения  $\beta_w, C_w$ , которые удовлетворяют неравенству

$$\vartheta_{m, \gamma/2} \leq \rho_w(\beta_w, C_w) \leq \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (3.4.6)$$

Для вычисления значений  $\beta_w, C_w$  вместо решения нелинейного уравнения

$$\rho_w(\beta, C) = m, \quad (3.4.7)$$

включающего две неизвестные величины  $\beta, C$ , рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\beta, C) = |\rho_w(\beta, C) - m|^2. \quad (3.4.8)$$

Заметим, что решение этой задачи всегда существует и для его нахождения можно использовать известные процедуры минимизации. В качестве  $\beta_w, C_w$  принимается такой элемент  $\{\beta^{(n)}, C^{(n)}\}$  минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (3.4.6).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов критерий  $\rho_W(\beta, C)$  вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_W(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot \left( \tilde{d}_{j,k} - T_F(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_1(\beta), \lambda_2(\beta, C)) \right). \quad (3.4.9)$$

Это позволяет находить значения критерия (при реализации процедуры минимизации) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденных  $\beta_W$ ,  $C_W$  и вычисленных  $\hat{d}_{j,k}$ ) только один раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения функции.

Отметим некоторые свойства  $\rho_W(\beta, C)$ , которые следуют из (3.4.9):

- все слагаемые, входящие в формулу (3.4.9), не отрицательны (могут изменяться от 0 до  $\tilde{d}_{j,k}^2$ ) и поэтому  $\rho_W(\beta, C) \geq 0$ ;
- при  $\beta \rightarrow 0$  и  $C < \infty$  справедлив предел  $\rho_W(\beta, C) \rightarrow 0$ ;
- при  $\beta \rightarrow \infty$  и  $C < \infty$  справедлив предел

$$\rho_W(\beta, C) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2. \quad (3.4.10)$$

Последнее равенство имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее утверждение.

**Утверждение 3.4.1.** Если выполняется неравенство

$$\rho_W(\infty, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}^2 > \vartheta_{m,1-\gamma/2}, \quad (3.4.11)$$

то существуют конечные значения  $\beta_W$ ,  $C_W$ , для которых выполняется неравенство (3.4.6). ♣

Невыполнение условия (3.4.11) означает, что значения  $\tilde{f}_i = \eta_i$ , т.е.  $f_i \equiv 0$ . В этом случае  $\beta_w = \infty$  и сглаженные значения равны 0.

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценки  $\beta_w$ ,  $C_w$  легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы  $m$  (см. неравенство (3.4.6)) определяется как  $m = N_x \cdot N_y$ , где  $N_x, N_y$  – размеры фильтруемого изображения.

Существенной чертой приведенного алгоритма вычисления  $\beta_w$ ,  $C_w$  является использование дисперсии шума  $\sigma^2$ . На практике, как правило, эта величина неизвестна, и в этом случае так же, как и при выборе одной пороговой величины (см. п. 2.3), можно использовать оценку

$$\hat{\sigma}^2 = \left[ \frac{\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)}{0.6745} \right]^2, \quad (3.4.12)$$

где оператор  $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$  вычисляет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов уровня разложения  $j_0 + 1$  (объем выборки равен  $N/2$ ).

### 3.4.3. Исследования алгоритма выбора порогов двухпараметрических пороговых функций

Приведем некоторые результаты вычислительного эксперимента по исследованию оптимальности построенных оценок  $\beta_w$ ,  $C_w$ .

В качестве тестовых сигналов были взяты две дискретные функции, значения которых приведены на рис. 3.13а (назовем ее функция 1) и на рис. 3.13б (функция 2). Количество значений  $N = 2048$ . Выбор этих функций обусловлен присутствием в их спектре высококачественных составляющих, что существенно затрудняет фильтрацию шума.

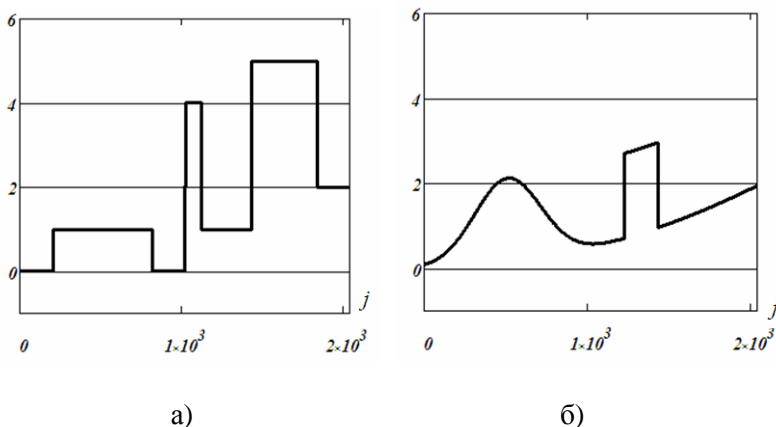


Рис. 3.13. Графики тестовых функций

Значения  $f_i$  этих функций искажались аддитивным шумом  $\eta_i$ , который моделировался псевдослучайными числами, имеющими нормальное распределение, нулевое среднее и дисперсию  $\sigma^2$ . Дисперсия вычислялась по задаваемому относительному уровню шума  $\delta_\eta = \frac{\|\tilde{f} - f\|}{\|f\|}$ ,  $\delta_\eta = 0.05, 0.10, 0.15$ . На рис. 3.14 представлены зашумленные значения функций 1, 2 при  $\delta_f = 0.10$ . В качестве критерия точности фильтрации была принята относительная ошибка

$$\delta_f(\beta, C) = \frac{\|\hat{f}_{(\beta, C)} - f\|}{\|f\|}, \quad (3.4.13)$$

где  $\hat{f}_{(\beta, C)}$  – вектор отфильтрованных значений, вычисленных при заданных параметрах  $\beta, C$  порогов (3.4.3), (3.4.4).

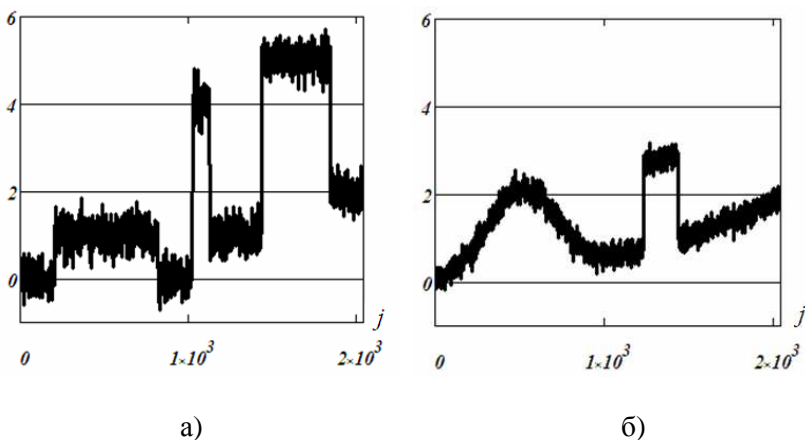


Рис. 3.14. Графики зашумленных функций

На рис. 3.15 приведены изолинии функционала  $\delta_f(\beta, C)$ , значения которого были вычислены для функции 1 и уровне шума  $\delta_\eta = 0.10$ . По оси абсцисс – параметр  $\beta$ , по оси ординат –  $C$ . Анализ формы изолиний показывает, что ошибка фильтрации сильно зависит от  $\beta$ , и значительно слабее от параметра  $C$ . Следовательно, оценка параметра  $\beta_{opt}$  должна иметь более высокую точность по сравнению с оценкой для  $C_{opt}$ .

Остановимся на очень важном вопросе: насколько точно  $\beta_w, C_w$  оценивают оптимальные значения параметров  $\beta_{opt}, C_{opt}$  или насколько увеличивается ошибка фильтрации при параметрах  $\beta_w, C_w$  от минимально возможной ошибки фильтрации?

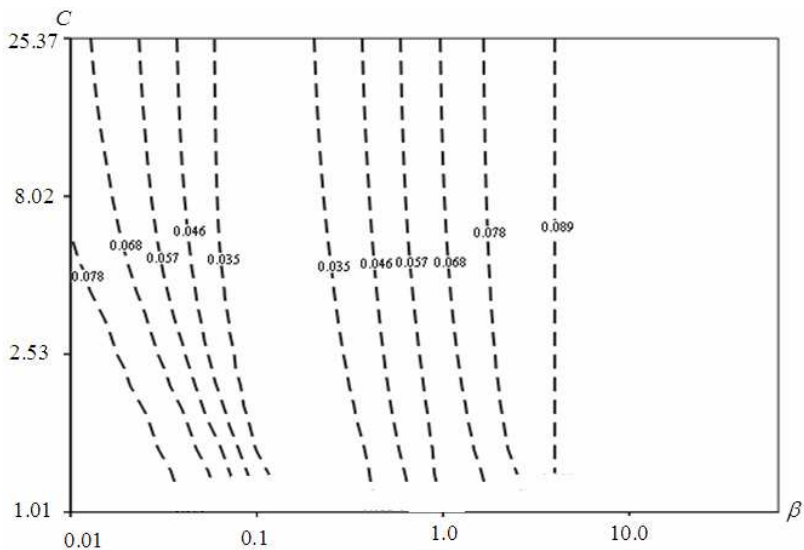


Рис. 3.15. Изолинии относительной ошибки фильтрации

Для ответа на этот вопрос был выполнен обширный вычислительный эксперимент, результаты которого для функции 2 и  $\delta_\eta = 0.10$  приведены в табл. 3.3. В верхней строке табл. 3.3 приведены значения  $\beta$ , в левом крайнем столбце – значения  $C$ , а в ячейке, стоящей на пересечении столбца с конкретным значением  $\beta$  и строки с значением  $C$ , соответствующее значение относительной ошибки  $\delta_f(\beta, C)$ . Выделенные ячейки соответствуют парам  $(\beta, C)$ , для которых выполняется неравенство (3.4.6), т.е. эти пары значений могут быть приняты в качестве пар  $(\beta_w, C_w)$ .

Таблица 3.3

$C \backslash \beta$	0,032	0,046	0,068	0,1	0,147	0,215	0,316
1,010	0,081	0,071	0,053	0,030	0,025	0,033	0,043
1,272	0,077	0,065	0,042	0,025	0,027	0,034	0,046
1,601	0,074	0,058	0,034	0,024	0,028	0,360	0,048
2,015	0,069	0,051	0,030	0,024	0,030	0,038	0,05
2,537	0,063	0,044	0,028	0,025	0,031	0,040	0,052
3,194	0,058	0,04	0,027	0,026	0,032	0,041	0,053
4,021	0,054	0,038	0,026	0,026	0,033	0,042	0,054
5,062	0,051	0,036	0,026	0,027	0,034	0,043	0,055
6,373	0,049	0,035	0,027	0,028	0,035	0,044	0,056
8,023	0,048	0,035	0,027	0,029	0,036	0,045	0,056
10,100	0,047	0,034	0,027	0,030	0,036	0,046	0,057
12,715	0,046	0,034	0,027	0,031	0,037	0,046	0,057

Анализ таблицы показывает:

- сильную зависимость ошибки фильтрации от параметра  $\beta$  и слабую зависимость от параметра  $C$  (эта закономерность также проявилась в расположении изолиний на рис. 3.15);
- все выделенные (заштрихованные) ячейки соответствуют либо минимальной ошибке фильтрации, либо незначительному ее увеличению (не более чем на 10 %).

Аналогичные выводы можно сделать по данным полученным при других уровнях шума  $\delta_\eta = 0.05, 0.15$ , а также для функции 1.

Заметим, что минимальная относительная ошибка фильтрации с помощью однопараметрической функции *soft* была на 15 ÷ 25 % больше минимальной ошибки фильтрации с помощью двухпараметрической функции. Это является весомым аргументом в пользу двухпараметрических пороговых функций.



Величина относительной ошибки  $\delta_f(\beta, C)$  является случайной величиной (в силу статистической природы шума измерения  $\eta_i$ ). Поэтому для определения неслучайных характеристик точности был проведен следующий вычислительный эксперимент.

Определим коэффициент эффективности параметров  $(\beta_w, C_w)$  выражением

$$E = \frac{\delta_{\min}}{\delta_f(\beta_w, C_w)}. \quad (3.4.14)$$

Очевидно, что чем больше  $E$  отклоняется от единицы к нулю, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметрами  $(\beta_w, C_w)$  по сравнению с минимально возможной ошибкой  $\delta_{\min}$  (параметры  $(\beta_{opt}, C_{opt})$ ).

Для вычисления оценок числовых характеристик и построения гистограммы случайной величины  $E$  генерировались случайные векторы

$$\tilde{f}^{(l)} = f + \eta^{(l)}, \quad l = 1, \dots, N_s,$$

где  $\eta^{(l)}$  –  $l$ -я реализация случайного вектора  $\eta$ . Каждый вектор  $\tilde{f}^{(l)}$  фильтровался алгоритмом вейвлет-фильтрации с параметрами  $(\beta_w, C_w)$ , вычислялось значение  $E^{(l)}$ . По выборочной совокупности  $\{E^{(l)}\}$  вычислялись среднее  $\bar{E}$ , минимальное  $E_{\min}$ , максимальное  $E_{\max}$  значения и строилась гистограмма. Объем выборки  $N_s = 50$ . В табл. 3.4 приведены характеристики коэффициента эффективности для разных уровней шума и разных функций. Анализ средних значений  $\bar{E}$  показывает, что отклонение коэффициента эффективности параметров  $(\beta_w, C_w)$  от

единицы в среднем не превосходит 8 %, что говорит о приемлемой точности оценивания параметров  $(\beta_{opt}, C_{opt})$ .

Таблица 3.4

$\delta_\eta$	Функция 1			Функция 2		
	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$
0.01	0.823	0.937	1	0.782	0.918	1
0.05	0.852	0.958	1	0.806	0.927	1
0.10	0.915	0.976	1	0.811	0.931	1
0.15	0.883	0.968	1	0.804	0.929	1

На рис. 3.16 приведена гистограмма случайной величины  $E$  (относительный уровень шума равен  $\delta_\eta = 0.10$ , тестовая функция 1). Анализ гистограммы показывает, что значения величины  $E$  в основном сосредоточены в окрестности точки  $\bar{E} = 0.975$  и имеют небольшие отклонения от этой точки.

Этот факт (а также данные табл. 3.4) позволяет сделать вывод о приемлемой точности оценок  $\beta_w, C_w$  для оптимальных порогов и позволяет рекомендовать *величины  $\beta_w, C_w$  в качестве порогов в алгоритмах вейвлет-фильтрации с двухпараметрической пороговой функцией.*

**Замечание 3.4.1.** Появление небольшого числа значений коэффициента эффективности в окрестности точки 0.93 можно объяснить. При проверке основной гипотезы (3.3.4) можно с вероятностью  $\gamma = 0.05$  совершить ошибку первого рода, т.е. отвергнуть гипотезу  $H_0$  в случае, когда она верна. Тогда вычисля-

ются другие значения пороговых величин, которые обуславливают увеличение ошибки фильтрации и уменьшение коэффициента эффективности. ♦

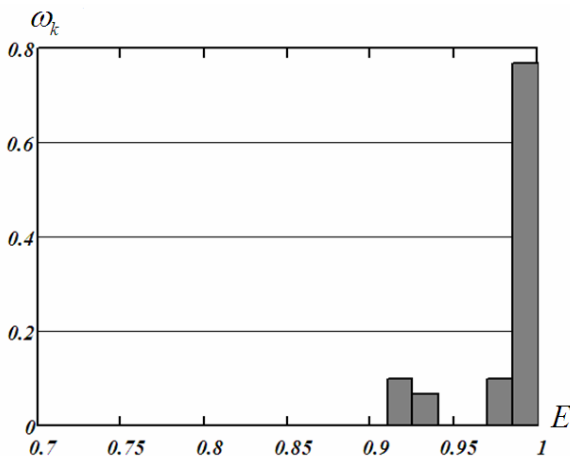


Рис. 3.16. Гистограмма коэффициента эффективности

### 3.5. Выбор параметров трехпараметрических пороговых функций

Предлагается алгоритм оценивания оптимальных параметров трехпараметрических пороговых функций из условия минимума СКО фильтрации на основе критерия оптимальности, изложенного в п. 3.3.

#### 3.5.1. Пороговые функции с тремя параметрами

После рассмотрения двухпараметрических пороговых функций (см. п. 3.4) возникает вопрос: существуют ли пороговые функции с тремя параметрами? Ответ положителен. В работе [53] построена трехпараметрическая пороговая функция (обозначаемая как *custom*), определяемая следующим выражением:

$$T_c(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1; \\ \alpha \lambda_2 \cdot \left[ \frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]^2 \cdot \left\{ (\alpha - 3) \cdot \left( \frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + 4 - \alpha \right\}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2; \\ \tilde{d} - \text{sign}(\tilde{d})(1 - \alpha)\lambda_2, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

где  $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

На рис. 3.17 показаны графики функции (3.5.1) при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  и разных значениях параметра  $\alpha$ : кривая 1 –  $\alpha = 0$ ; кривая 2 –  $\alpha = 0.2$ ; кривая 3 –  $\alpha = 0.5$ ; кривая 4 –  $\alpha = 0.7$ ; кривая 5 –  $\alpha = 1.0$ . Видно, что при  $\alpha = 0.0$  и  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$  функция (3.5.1) совпадает с функцией (3.1.2).

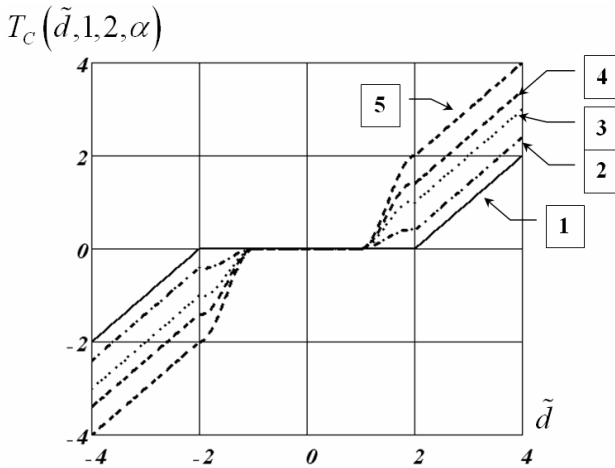


Рис. 3.17. Графики пороговой функции (3.5.1)

Вопрос: что дает использование этой пороговой функции? С одной стороны, меняя параметр  $\alpha$ , можно менять форму пороговой функции, но с другой – надо выбирать (и желательно наи-

лучшим образом) уже три параметра и выбор этих параметров вообще не рассматривается в соответствующих научных публикациях. Исключением являются работы автора [23, 25, 65]

### 3.5.2. *Оценивание оптимальных пороговых величин на основе критерия оптимальности*

Обозначим через  $\mu$  вектор, составленный из параметров пороговой функции. Тогда для одномерного дискретного сигнала СКО фильтрации определим функционалом

$$\Delta(\mu) = M \left[ \| \hat{f}_\mu - f \|^2 \right], \quad (3.5.2)$$

где  $M [ \ ]$  – оператор математического ожидания по плотности распределения шума;  $f, \hat{f}_\mu$  – векторы, проекции которых равны значениям «точного» и «сглаженного» (с использованием соответствующей пороговой функции) сигналов соответственно. Набор  $\mu_{opt}$ , минимизирующий СКО (3.5.2) назовем вектором оптимальных параметров и для оценки этого вектора вновь обратимся к критерию оптимальности.

Определим вектор невязки  $e_\mu = \tilde{f} - \hat{f}_\mu$  с проекциями  $e_{\mu_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, N$ , где  $N$  – число значений обрабатываемой функции. Введем статистику:

$$\rho_w(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \langle e_\mu, \tilde{f} \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{\mu_i} \tilde{f}_i. \quad (3.5.3)$$

В качестве оценки для  $\mu_{opt}$  примем вектор  $\mu_w$ , для которого статистика  $\rho_w(\mu)$  удовлетворяет неравенству

$$\vartheta_{m,\gamma/2} \leq \rho_w(\mu_w) \leq \vartheta_{m,1-\gamma/2}, \quad (3.5.4)$$

где  $\vartheta_{m,\gamma/2}, \vartheta_{m,1-\gamma/2}$  – квантили  $\chi_m^2$ -распределения с  $m$  степенями свободы уровней  $\gamma/2, 1-\gamma/2$  соответственно;  $\gamma$  – вероятность

ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно  $\gamma = 0.05$ ),  $m = N$  – число значений фильтруемого сигнала (проекция вектора  $\tilde{f}$ ). Если число степеней свободы  $m > 30$ , то, приняв вероятность ошибки первого рода  $\gamma = 0.05$ , получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (3.5.4):

$$v_{m,0.025} = m - 1.96\sqrt{2m}; \quad v_{m,0.975} = m + 1.96\sqrt{2m}. \quad (3.5.5)$$

Для вычисления вектора  $\mu_w$  рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\mu) = |\rho_w(\mu) - m|^2 \quad (3.5.6)$$

при заданных ограничениях на проекции вектора  $\mu$ . Для решения этой задачи можно использовать известные процедуры минимизации. В качестве  $\theta_w$  принимается такой элемент  $\{\theta^{(n)}\}$  минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (3.5.4).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов статистика  $\rho_w(\mu)$  вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_w(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot (\tilde{d}_{j,k} - T(\tilde{d}_{j,k}, \mu)). \quad (3.5.7)$$

В алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений обработке подвергаются следующие коэффициенты: горизонтальные детализирующие  $ad_{j,n,m}$ , вертикальные детализирующие коэффициенты  $da_{j,n,m}$ , диагональные детализирующие коэффициенты  $dd_{j,n,m}$ .

Тогда

$$\rho_w(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \left[ \sum_{n,m} a\tilde{d}_{j,n,m} \cdot (a\tilde{d}_{j,n,m} - T(a\tilde{d}_{j,n,m}, \mu)) + \sum_{n,m} \tilde{d}a_{j,n,m} \cdot (\tilde{d}a_{j,n,m} - T(\tilde{d}a_{j,n,m}, \mu)) \right] + \frac{1}{\sigma^2} + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \left[ \sum_{n,m} d\tilde{d}_{j,k} \cdot (d\tilde{d}_{j,n,m} - T(d\tilde{d}_{j,n,m}, \mu)) \right] \quad (3.5.8)$$

Предложенные формулы позволяют вычислять значения  $\rho_w(\mu)$  (которые необходимы в процедурах минимизации функционала (3.5.6)) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденном векторе  $\mu_w$  и вычисленных коэффициентах разложения) только один раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения сигнала или изображения. Это существенно сокращает число вычислительных операций для нахождения вектора  $\theta_w$ , особенно при фильтрации изображений.

Рассмотрим формирование вектора  $\mu$  для конкретной пороговой функции (3.5.1). Для этой функции вектор  $\mu = \begin{pmatrix} \beta \\ C \\ \alpha \end{pmatrix}$ , пороговые величины  $\lambda_1, \lambda_2$  определяются выражениями:

$$\lambda_1(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad \lambda_2(\beta, C) = \beta \cdot C \sqrt{2 \ln(N_j)},$$

а  $\alpha$  принимает значения из интервала  $[0, 1]$ .

Вычисление оценок  $\beta_w, C_w, \alpha_w$  для оптимальных значений  $\beta_{opt}, C_{opt}, \alpha_{opt}$  осуществляется на основе минимизации функционала (3.5.6) при ограничениях:

$$0 \leq \beta < \infty, \quad C > 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.5.9)$$

Отметим некоторые свойства  $\rho_w(\mu)$  для сформированных векторов  $\mu$  (одномерный сигнал):

- все слагаемые, входящие в (3.5.7), не отрицательны (могут изменяться от 0 до  $\tilde{d}_{j,k}^2$ ) и поэтому  $\rho_w(\mu) \geq 0$ ;
- при  $\beta \rightarrow 0$  и  $C < \infty, 0 \leq \alpha \leq 1$  справедлив предел  $\rho_w(\mu) \rightarrow 0$ ;
- при  $\beta \rightarrow \infty$  и  $C < \infty, 0 \leq \alpha \leq 1$  справедлив предел

$$\rho_w \begin{pmatrix} \beta \\ C \\ \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2. \quad (3.5.10)$$

Последнее равенство имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее утверждение.

**Утверждение 3.5.1.** Если выполняется неравенство

$$\rho_w \begin{pmatrix} \infty \\ C \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \vartheta_{m,1-\gamma/2}, \quad (3.5.11)$$

то существуют конечные значения  $\mu_w$ , для которых выполняется неравенство (3.5.4).

Невыполнение этого условия означает, что зашумленные значения сигнала или изображения определяются только шумом измерения. В этом случае  $\beta_w = \infty$  и сглаженные значения сигнала или изображения равны 0.

Аналогичные свойства и соответствующее утверждение можно сформулировать и для вейвлет-фильтрации изображений, где  $\rho_w(\mu)$  определяется выражением (3.5.8). При этом число степеней свободы  $t$  определяется как  $t = N_x \cdot N_y$ , где  $N_x, N_y$  – размеры фильтруемого изображения.



Существенной чертой приведенного алгоритма вычисления  $\theta_w$  является использование дисперсии шума  $\sigma^2$ . Как правило,  $\sigma^2$  неизвестна, и в этом случае можно использовать оценку  $\hat{\sigma}^2$  (см. формулу (2.3.11)).

### 3.5.3. Исследование многопараметрических пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации

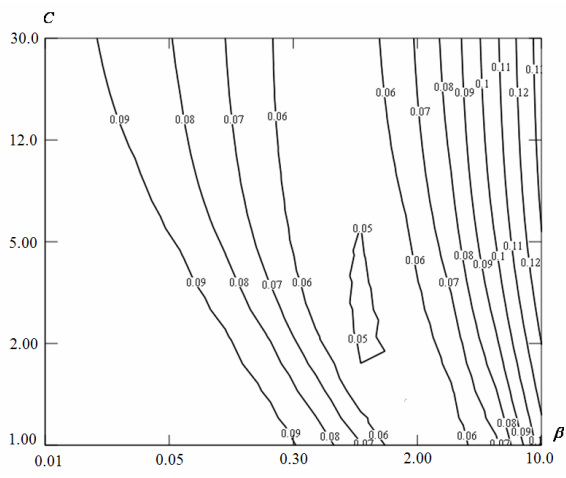
Для ответа на вопрос: какая пороговая функция лучше с двумя или с тремя параметрами, был выполнен обширный вычислительный эксперимент, некоторые результаты которого рассматриваются ниже.

В качестве тестовых изображений были взяты два изображения LENA (пример гладкого изображения) и TARGET (пример контрастного изображения) размером  $256 \times 256$  пикселей, приведенных на рис. 3.9. Условия эксперимента были те же, что и в п. 3.3.4.

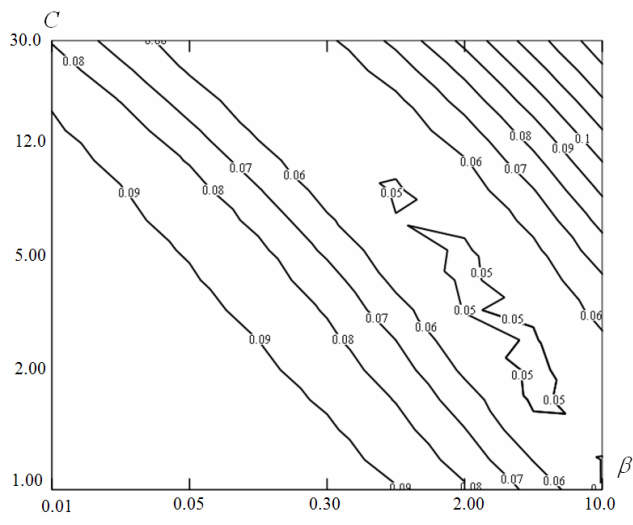
В качестве критерия точности фильтрации изображения была принята *относительная ошибка*, определяемая выражением

ем  $\delta_F(\theta) = \frac{\|\hat{F}_\theta - F\|}{\|F\|}$ , где  $\hat{F}_\theta$  – результат фильтрации зашумленного изображения при заданном наборе параметров  $\theta$ .

Первоначально рассмотрим зависимость  $\delta_F(\theta)$  от различных параметров пороговых функций (3.4.1), (3.5.1). На рис. 3.18 приведены изолинии функционала  $\delta_F(\beta, C)$ , значения которого были вычислены при уровне шума  $\delta_\eta = 10$  для функций (3.4.1), (3.5.1) (у последней функции параметр  $\alpha = 0.10$ ). По оси абсцисс отложен параметр  $\beta$ , по оси ординат –  $C$ . Видно, что у пороговой функции (3.4.1) ошибка фильтрации сильно зависит от  $\beta$ , и значительно слабее от параметра  $C$ .



а)



б)

Рис. 3.18. Изолинии функционала ошибки фильтрации

Для пороговой функции (3.5.1) наблюдается зависимость ошибки фильтрации как от  $\beta$ , так и от  $C$ , что предъявляет более строгие требования к точности оценивания  $C_{opt}$  и поэтому эта пороговая функция является менее предпочтительной по сравнению с функцией (3.4.1).

Кратко остановимся на результатах исследований минимально возможных относительных ошибок для функций (3.4.1), (3.4.5). Генерировалась матрица шума  $\eta^{(l)}$ , где  $l$  – номер шумовой реализации (номер выборки) и для каждого зашумленного изображения  $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, 50$ , находились оптимальные параметры пороговых функций (3.4.1), (3.5.1) и соответствующие наименьшие (оптимальные) значения относительных ошибок фильтрации

$$\delta_{opt}^{(l)} = \frac{\|\hat{F}_{\theta_{opt}^{(l)}} - F\|}{\|F\|}. \quad (3.5.12)$$

Нахождение таких величин возможно, так как в вычислительном эксперименте известно точное (незашумленное) изображение  $F$ . Затем вычислялось отношение

$$O^{(l)} = \frac{\delta_{opt_{ss}}^{(l)}}{\delta_{opt_c}^{(l)}}, \quad (3.5.13)$$

где в числителе стоит величина наименьшей ошибки для функции (3.4.1), в знаменателе – для функции (3.5.1). Если это отношение меньше 1, то предпочтение отдается пороговой функции (3.4.1), в противном случае – функции (3.5.1). По выборочным величинам  $O^{(l)}$  (объем выборки равен 50) вычислялись наименьшее  $O_{\min}$ , среднее  $\bar{O}$  и максимальное  $O_{\max}$  значения. Эти числовые характеристики приведены в табл. 3.5 для трех уровней шума и трех значений  $\alpha$  (функция (3.5.1)).

Таблица 3.5

$\delta_\eta$	$\alpha$	Изображение LENA			Изображение TARGET		
		$O_{\min}$	$\bar{O}$	$O_{\max}$	$O_{\min}$	$\bar{O}$	$O_{\max}$
<b>0.02</b>	<b>0.2</b>	0.743	0.811	0.911	0.758	0.805	0.857
	<b>0.5</b>	0.801	0.862	0.971	0.799	0.843	0.891
	<b>0.9</b>	0.971	0.986	0.992	0.970	0.989	0.994
<b>0.05</b>	<b>0.2</b>	0.813	0.866	0.923	0.793	0.831	0.871
	<b>0.5</b>	0.863	0.909	0.982	0.816	0.865	0.908
	<b>0.9</b>	0.978	0.995	1.005	0.972	0.992	0.999
<b>0.10</b>	<b>0.2</b>	0.888	0.945	0.982	0.848	0.893	0.941
	<b>0.5</b>	0.921	0.935	0.996	0.869	0.914	0.958
	<b>0.9</b>	0.981	1.002	1.011	0.979	0.999	1.006

Анализ табл. 3.5 показывает, что только для значений  $\alpha \geq 0.9$  минимальные относительные ошибки фильтрации при использовании функций (3.4.1), (3.5.1) сопоставимы. Для всех других  $\alpha$  более предпочтительным является функция (3.4.1). Учитывая, что эта функция требует для своего вычисления еще и меньше операций (что особенно важно при фильтрации изображений) окончательный выбор следует сделать в пользу пороговой функции (3.4.1), которая зависит только от двух параметров.

Перейдем к исследованию эффективности оценивания оптимальных параметров пороговых функций предложенным алгоритмом на основе минимизации функционала (3.5.6). Заметим, что величина относительной ошибки фильтрации

$$\delta_F(\theta) = \frac{\|\hat{F}_\theta - F\|}{\|F\|}$$

является случайной величиной (в силу стати-

стической природы шума измерения). Поэтому для определения неслучайных характеристик точности был проведен следующий вычислительный эксперимент.