

Коэффициент эффективности оценки  $\theta_W$  для  $\theta_{opt}$  определим выражением

$$E = \frac{\delta_{\min}}{\delta_F(\theta_W)}. \quad (3.5.14)$$

Очевидно, что, чем больше  $E$  отклоняется от единицы к нулю, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметрами  $\theta_W$  по сравнению с минимально возможной (для данного зашумленного изображения  $\tilde{F}$ ) ошибкой  $\delta_{\min}$  (алгоритм фильтрации с параметрами  $\theta_{opt}$ ).

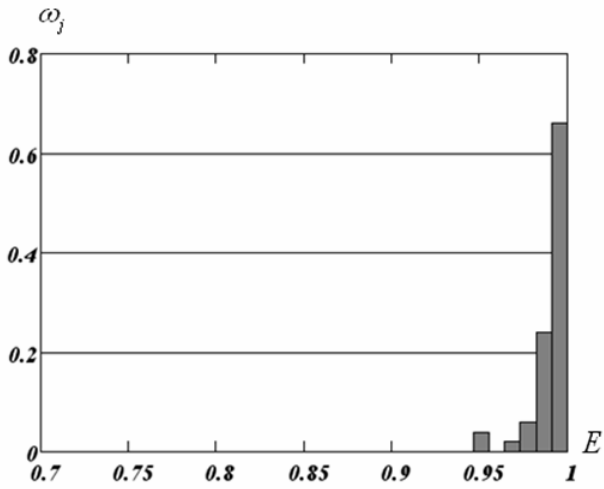
Для вычисления оценок числовых характеристик и построения гистограммы случайной величины  $E$  генерировались зашумленные изображения  $\tilde{F}^{(l)}, l=1, \dots, 50$ . Для каждого изображения  $\tilde{F}^{(l)}$  определялись:  $\delta_{\min}^{(l)}$ ,  $\delta_F^{(l)}(\theta_{WF})$  (пороговая функция (3.4.1)),  $\delta_F^{(l)}(\theta_{WC})$  (пороговая функция (3.4.5) при  $\alpha = 0.9$ ) и коэффициенты эффективности  $E_F^{(l)} = \frac{\delta_{\min}^{(l)}}{\delta_F^{(l)}(\theta_{WF})}$ ,  $E_C^{(l)} = \frac{\delta_{\min}^{(l)}}{\delta_F^{(l)}(\theta_{WC})}$ .

Для каждой выборочной совокупности  $\{E_F^{(l)}\}$ ,  $\{E_C^{(l)}\}$  вычислялись соответствующие числовые характеристики: среднее  $\bar{E}$ , минимальное  $E_{\min}$ , максимальное  $E_{\max}$  значения и строилась гистограмма относительных частот (т.е. вычислялись отношения  $\omega_j = n_j/50$ , где  $n_j$  – количество значений коэффициента эффективности, попавших в  $j$ -й интервал гистограммы). В табл. 3.6 приведены числовые характеристики коэффициента эффективности для разных уровней шума и разных изображений. Выделенные темным фоном ячейки таблицы соответствуют относительной ошибке фильтрации с использованием пороговой функции (3.5.1); не выделенные ячейки – пороговой функции (3.4.1).

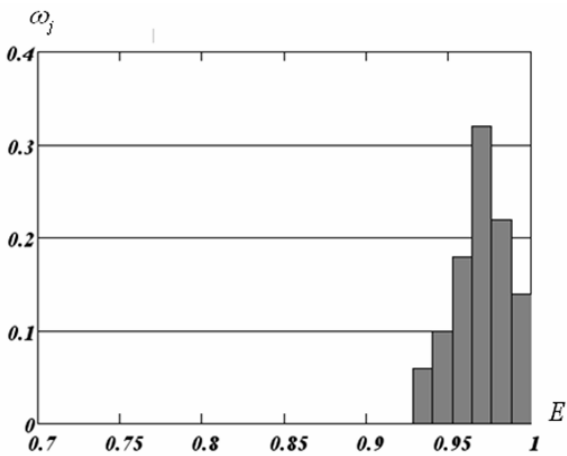
Таблица 3.6

$\delta_\eta$	Изображение LENA			Изображение TARGET		
	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$
0.02	0.785	0.945	1	0.831	0.948	1
	0.746	0.879	1	0.812	0.925	0.976
0.05	0.813	0.961	1	0.873	0.965	1
	0.797	0.929	1	0.857	0.932	0.989
0.10	0.831	0.976	1	0.946	0.991	1
	0.781	0.942	1	0.928	0.969	1

Анализ средних значений  $\bar{E}$  показывает, что предложенный подход к выбору параметров пороговых функций позволяет достаточно точно оценить оптимальные значения как для функции (3.4.1), так и для функции (3.5.1). Так отклонение среднего значения коэффициента эффективности от единицы для функции (3.4.1) не превосходит 6 %. Для функции (3.5.1) такое отклонение выше (на уровне 9–12 %). Дополнительно заметим, что для некоторых уровней шума максимальное значение  $E_{\max}$  функции (3.5.1) не равняется единице. Все это подтверждает ранее высказанный тезис о предпочтительности пороговой функции (3.4.1). На это также указывают гистограммы, приведенные на рис. 3.19а (случайная величина  $E_F$ ) и рис. 3.19б (случайная величина  $E_C$ ), построенные для изображения TARGET и уровне шума 0.1.



a)



б)

Рис. 3.19. Гистограммы коэффициента эффективности

Видно, что для пороговой функции (3.5.1) значения коэффициента эффективности в большей степени отклоняются от единицы, что говорит о меньшей точности оценивания оптимальных параметров этой функции.

Результаты численных исследований показали, что предложенный подход к выбору пороговых величин позволяет с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги как для пороговой функции (3.4.1), так и для функции (3.5.1). Однако использование двухпараметрической функции (3.4.1) в пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации является более предпочтительным.

## ГЛАВА 4. ЧТО ЛУЧШЕ: ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЛИ ВЕЙВЛЕТ- ФИЛЬТРАЦИИ

Глава посвящена сравнению двух классов алгоритмов фильтрации шумов различной статистической природы.

### 4.1. Алгоритмы пространственной фильтрации

Рассматриваются основные алгоритмы, в которых обработке подвергаются зашумленные значения, попавшие в апертуру фильтра.

#### 4.1.1. Классификация алгоритмов фильтрации

Часто используемые на практике алгоритмы фильтрации изображений, искаженных шумами, можно условно разделить на два класса:

- *алгоритмы фильтрации в пространственной области;*
- *алгоритмы фильтрации в частотной области.*

Результат фильтрации алгоритмами первого класса определяется преобразованием значений исходного сигнала или изображения, попавших в апертуру (окно) фильтра [1, 2, 27, 32]. Такими преобразованиями может быть вычисление среднего значения, медианы или других числовых характеристик (например, вычисление среднего только тех значений, которые принадлежат некоторому интервалу). Для обработки всего изображения апертуру фильтра «перемещают» по обрабатываемому изображению.

Изменение размеров апертуры фильтра позволяет «управлять» характеристиками алгоритма сглаживания. При малых размерах апертуры сохраняются контрастные элементы (ребра, резкие грани) изображения, но шум сглаживается слабо; увеличение размеров апертуры приводит к более сильному сглаживанию шума, но при этом возможно «размытие» контрастных элементов исходного изображения.

Размеры апертуры можно задать априори (что и делается на практике) и в процессе обработки зашумленных значений эти размеры не меняются (т.е. размеры апертуры фиксированы). Такое задание не учитывает структуру фильтруемого сигнала или изображения и не позволяет минимизировать ошибку фильтрации.

Второй подход к заданию размера апертуры заключается в том, что учитывается структура фильтруемого сигнала (путем анализа его числовых характеристик) и это позволяет менять размеры апертуры: при фильтрации контрастных элементов (ребра, резкие грани) размеры апертуры уменьшаются; при фильтрации «плоских» фрагментов (уровень сигнала слабо изменяется) размеры апертуры увеличиваются. Такие алгоритмы фильтрации можно назвать *адаптивными*, а алгоритмам адаптации размера апертуры посвящен ряд публикаций (например, [5, 6, 9, 11, 58, 59]).

Описанные алгоритмы фильтрации (как с фиксированной, так и изменяющейся апертурой) в дальнейшем будем называть *локально-пространственными алгоритмами фильтрации* (ЛПАФ).

В алгоритмах фильтрации в частотной области обработке подвергаются коэффициенты разложения зашумленного изображения по некоторой системе базисных функций. Примером могут служить рассмотренные в предыдущих главах алгоритмы вейвлет-фильтрации, где коэффициенты вычисляются в базисе вейвлет-функций. Обработка заключается в умножении коэффициента на фильтрующий множитель, значения которого находятся в интервале от нуля до единицы. Такие алгоритмы фильтрации в дальнейшем будем называть *алгоритмами вейвлет-фильтрации* (АВФ).

Следует отметить, что алгоритмы и локально-пространственной фильтрации и вейвлет-фильтрации используются и при решении одного класса обратных измерительных задач – *восстановления изображений*. Здесь алгоритмы фильтрации используются на этапе постобработки восстановленного (с использованием методов регуляризации) изображения. Так, в ра-

ботах [13, 16] предложен класс частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов, позволяющих восстанавливать изображения со значительно меньшей ошибкой по сравнению с линейными регуляризирующими алгоритмами. В работах [24, 52] для постобработки восстановленного изображения использовался АВФ.

Несмотря на столь широкое использование ЛПАФ и АВФ при решении различных задач обработки, в литературе отсутствует сравнение точности этих алгоритмов при фильтрации изображений различной структуры и «гладкости» и зашумленных шумами различной статистической природы. Дело в том, что при построении и исследовании алгоритмов фильтрации исходят из справедливости предположения о *некоррелированности соседних отсчетов шума измерения* (так называемый «белый» шум). На практике это предположение часто не выполняется. Очевидно, что фильтрация цветного шума рассматриваемыми алгоритмами имеет свои особенности, но это не нашло отражения в соответствующих публикациях. Поэтому ниже проводится исследование точности ЛПАФ и АВФ по результатам фильтрации разных (по структуре и гладкости) изображений, искаженных шумами различной статистической природы: белым, цветным и импульсным.

#### 4.1.2. Локально-пространственные алгоритмы фильтрации

Для пояснения принципа работы этих фильтров предположим, что даны значения некоторого зашумленного одномерного сигнала  $\tilde{f}_j = f_j + \eta_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\eta_j$  – случайный шум (погрешность) с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  (для простоты такой шум будем называть *однородным*). Приведем краткое описание часто применяемых на практике локально-пространственных алгоритмов фильтрации (подробнее см. [3, 27, 34]).

**Фильтр скользящего среднего.** Выходной сигнал  $f_j^{\Phi CC}$  фильтра скользящего среднего определяется соотношением

$$f_j^{\Phi CC} = \text{aver}_K(\tilde{f}_{j-K}, \tilde{f}_{j-K+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+K}) = \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K \tilde{f}_{j+i}, \quad (4.1.1)$$

где  $\text{aver}_K()$  – функция, вычисляющая среднее значение из  $2K + 1$  значений, указанных в скобках. Величину  $K$  можно интерпретировать как размер апертуры фильтра скользящего среднего. «Перемещая» апертуру фильтра по всем значениям  $\tilde{f}_j$ , вычисляются значения  $f_j^{\Phi CC}$  для всего исходного сигнала. Особенностью фильтра скользящего среднего является хорошее сглаживание однородного шума измерения. Дисперсия отфильтрованного значения  $f_j^{\Phi CC}$  (т.е. дисперсия «остаточного» шума) равна  $D[f_j^{\Phi CC}] = \frac{\sigma^2}{2K+1}$ . Следовательно, чем больше размер апертуры, тем сильнее сглаживание. Однако при этом сильнее сглаживаются и контрастные детали исходного сигнала, которые необходимо сохранить в отфильтрованном сигнале. Это противоречие всех линейных алгоритмов фильтрации в определенной степени отсутствует в следующем фильтре.

**Интервальный фильтр скользящего среднего.** Выходной сигнал определяется выражением:

$$f_j^{H\Phi} = \text{aver}_K(\tilde{f}_i : j - K \leq i \leq j + K, |\tilde{f}_i - \tilde{f}_j| \leq \beta), \quad (4.1.2)$$

т.е. усредняются только те исходные значения  $\tilde{f}_i$ , которые попали в интервал  $[\tilde{f}_j - \beta, \tilde{f}_j + \beta]$ . Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей «точного» сигнала  $f_j$ . Выбор величины  $\beta$  играет существенную роль в работе рассматриваемого фильтра. Для определения  $\beta$  можно использовать правило «двух сигм»:

$$\beta = 2\sigma, \quad (4.1.3)$$



которое говорит о том, что значения нормально распределенной случайной величины с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  с вероятностью близкой к 0.95 попадут в интервал  $[-\beta, \beta]$ .

**Медианный фильтр.** Выходной сигнал  $f_j^{M\Phi}$  медианного фильтра определяется соотношением

$$f_j^{M\Phi} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \tilde{f}_{j-L+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}), \quad (4.1.4)$$

где  $\text{med}_L(\cdot)$  – функция, вычисляющая медиану из  $2L + 1$  значений, указанных в скобках. Особенности медианного фильтра являются:

- хорошая фильтрация импульсных шумов;
- сохранение в отфильтрованном сигнале контрастных деталей сигнала  $f_j$ ;
- выходной сигнал медианного фильтра равен одному из значений  $\tilde{f}_j$ , попавших в апертуру фильтра. Следовательно, выходной сигнал медианного фильтра содержит «остаточный» шум фильтрации, который определяется погрешностями исходных данных, что обуславливает его низкую эффективность при фильтрации однородных шумов.

**Комбинированный фильтр.** Работу такого комбинированного фильтра (КФ) «медианный фильтр + интервальный фильтр скользящего среднего» можно представить следующими шагами, выполняемыми для  $j \in [1, \dots, N]$ :

*Шаг 1.* Строится оценка

$$f_j^{M\Phi} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}). \quad (4.1.5)$$

*Шаг 2.* Строится оценка

$$f_j^{K\Phi} = \text{aver}_K(f_i^{M\Phi} : j - K \leq i \leq j + K, |f_i^{M\Phi} - f_j^{M\Phi}| \leq \beta), \quad (4.1.6)$$

где  $L, K$  – размер апертур фильтров, причем  $K \geq L$ . Заметим, что на шаге 2 усредняются только те значения  $f_i^{M\Phi}$ , которые попали в интервал  $[f_j^{M\Phi} - \beta, f_j^{M\Phi} + \beta]$ . Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей сигнала  $f_j$ .

Для определения величины  $\beta$  можно использовать следующий способ. Предположим, что значение  $f_j^{M\Phi}$  являющееся результатом медианной фильтрации, содержит «остаточную» случайную ошибку с дисперсией  $\sigma^2$ . Тогда величину  $\beta$  вычислим по правилу «двух сигм» (формула (4.1.3)).

#### 4.1.3. Исследования локально-пространственных алгоритмов фильтрации

Для иллюстрации работы рассмотренных фильтров приведем результаты следующего вычислительного эксперимента. Значения  $f_j, j = 1, \dots, N = 1024$ , прямоугольного сигнала искажались нормально распределенными случайными числами  $\eta_j$  (имитация однородного шума), имеющими нулевое среднее и дисперсию  $10^4$ , что соответствовало относительному уровню

погрешности  $\delta_f = \frac{\|\tilde{f} - f\|}{\|f\|} = 0.115$ , где  $f, \tilde{f}$  – векторы, состав-

ленные из «точных» и «зашумленных» значений функции соответственно. Пять процентов значений функции искажались случайными числами  $\eta_j'$  с дисперсией  $10^6$  (имитация импульсного шума). На рис. 4.1 показаны искаженные значения функции, которые являлись исходными данными для алгоритмов фильтрации. Отчетливо видно выбросы значений, обусловленные импульсным шумом. Относительный уровень погрешности исходных данных с импульсным шумом  $\delta_f = 0.299$ .

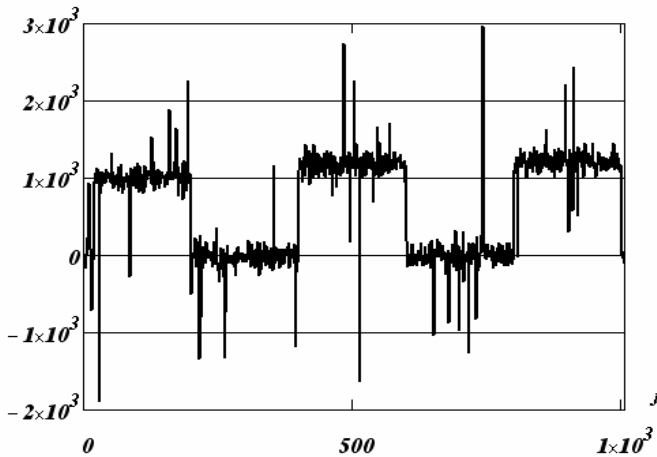


Рис. 4.1. Исходный зашумленный сигнал

Первоначально эти данные подверглись медианной фильтрации при  $L = 5$ . Результаты фильтрации показаны на рис. 4.2 и имеют относительный уровень ошибки  $\frac{\|f^{M\phi} - f\|}{\|f\|} = 0.06$ . Медианный фильтр хорошо удалил импульсный шум, но оставил низкоамплитудный шум, что является отмеченной особенностью медианного фильтра.

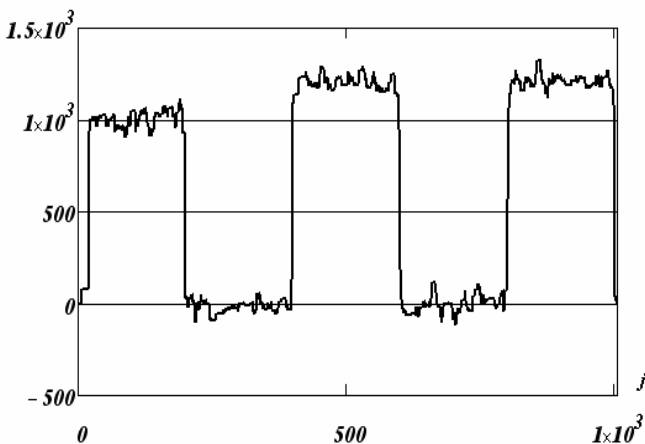


Рис. 4.2. Результат работы алгоритма  
медианной фильтрации

Затем для обработки данных использовался интервальный фильтр с параметрами  $K = 100$ ,  $\beta = 200$ . Результат фильтрации изображен на рис. 4.3. Относительная погрешность отфильтрованного сигнала

$\frac{\|f^{ИФ} - f\|}{\|f\|} = 0.285$ . Видно, что импульсный шум не удаляется интервальным фильтром.

На рис. 4.4 представлен результат обработки исходных данных комбинированным фильтром при  $L = 5$ ,  $K = 100$ . Величина  $\beta$  задавалась по правилу (4.1.3) и равнялась 200. Видно, что отсутствуют не только импульсные помехи, но и однородные шумы, которые присутствовали после медианной фильтрации (см. рис. 4.2).

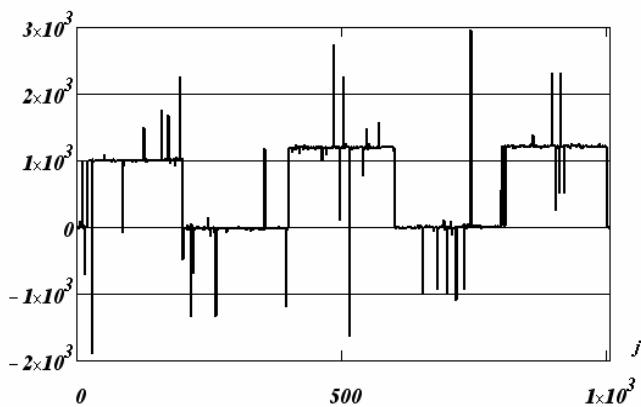


Рис. 4.3. Результат работы интервального фильтра

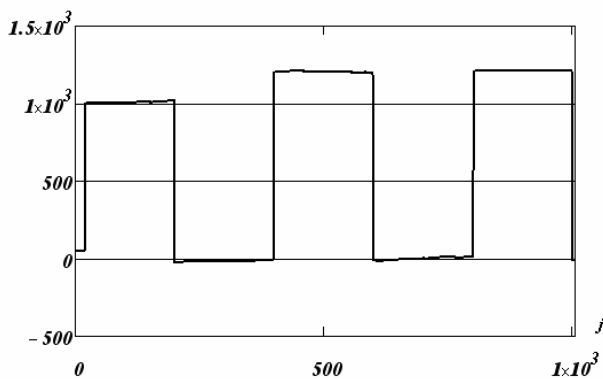


Рис. 4.4. Результат работы комбинированного фильтра

Кроме этого, в отфильтрованном сигнале сохранены (не сглажены) все прямоугольные углы. Это позволяет сделать вывод: комбинированный фильтр (4.1.5), (4.1.6) позволяет эффективно удалять импульсные и низкоамплитудные погрешности, сохраняя при этом высокочастотные информативные составляющие (в нашем случае это прямые углы). Относительная погреш-

ность отфильтрованного сигнала  $\frac{\|f^{K\Phi} - f\|}{\|f\|} = 0.029$ . Таким обра-

зом, применение КФ позволило подавить как импульсный шум, так и однородный шум.

Описанные алгоритмы фильтрации одномерного сигнала легко обобщается на фильтрацию изображений (двумерный сигнал). Для этого операции вычисления медианы, интервального среднего будут выполняться над значениями  $\tilde{f}_{i_1, i_2}$ , попавших в плоские апертуры, чаще всего прямоугольные. Например, для медианного фильтра – апертура размером  $(2L_1 + 1) \times (2L_2 + 1)$ , а для интервального усреднения – апертура размером  $(2K_1 + 1) \times (2K_2 + 1)$ .

Очевидно, что качество фильтрации как рассмотренных ЛПАФ, так и других алгоритмов этого класса зависит от размеров апертуры фильтра, т.е. размеры апертуры являются своеобразным «управляющим параметром». К сожалению, реальные изображения не являются стационарными: они содержат как монотонные области, так и области с большими градиентами (ребра, скачки амплитуды и т.д.). Поэтому на практике очень трудно подобрать один оптимальный размер апертуры фильтра для обработки всего изображения. В подобных ситуациях желательно использовать апертуру с большими размерами в монотонных областях обрабатываемого изображения, и апертуру с малыми размерами – вблизи «скачков» или «ребер» изображений. Локальные фильтры с изменяющимися размерами апертуры называются *адаптивными фильтрами*.

При построении таких адаптивных фильтров главным вопросом является алгоритм адаптации размеров апертуры локального фильтра. В работах [5, 6, 7, 11, 56, 59] предложены раз-

ные алгоритмы адаптации, основанные на локальных статистиках обрабатываемого изображения. Не останавливаясь на этих алгоритмах, только заметим, что использование адаптивных фильтров может на 20–30 % уменьшить ошибку фильтрации изображений [5, 6].

## 4.2. Сравнение двух классов алгоритмов фильтрации

Исследуется эффективность фильтрации шумов различной статистической природы с использованием локально-пространственных алгоритмов фильтрации и алгоритмов вейвлет-фильтрации [20, 62].

### 4.2.1. Схема вычислительного эксперимента

Кратко опишем схему проведенного вычислительного эксперимента по фильтрации шумов различной статистической природы.

В качестве тестовых изображений были взяты два изображения LENA и TARGET размером  $256 \times 256$  пикселей, приведенных на рис. 3.9. По статистической природе моделируемого шума измерения выполненный вычислительный эксперимент можно условно разделить три серии:

1. **Белый шум измерения.** Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$  и соседние отсчеты шума не коррелированы друг с другом, т.е. шум измерения являлся белым.

2. **Цветной шум измерения.** Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$  и соседние отсчеты шума коррелированы друг с другом с коэффициентом корреляции 0.5, т.е. шум измерения являлся цветным.

3. **Белый + импульсный шум измерения.** Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет с вероятностями 0.99 и 0.95 дисперсию  $\sigma^2$  и с вероятностями 0.01 и 0.05 – дисперсию  $400 \sigma^2$ . Соседние отсчеты шума не коррелированы друг с другом. Такой шум в за-

рубежной литературе называют смесью «соль – перец». Это означает, что из 65536 отсчетов изображения примерно 655 (вероятность 0.01) и 3275 (вероятность 0.05) отсчетов искажены импульсным шумом, амплитуда которого в 20 раз больше амплитуды шума с дисперсией  $\sigma^2$ .

Дисперсия  $\sigma^2$  задавалась по относительному уровню шума  $\delta_F = \frac{\|\tilde{F} - F\|}{\|F\|}$ , где  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму матрицы, т.е.

$$\|F\| = \left( \sum_{i_1} \sum_{i_2} F_{i_1, i_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Матрицы } F, \tilde{F} \text{ размером } 256 \times 256 \text{ пикселей}$$

составлены из значений точного и зашумленного изображений соответственно. В эксперименте задавались два уровня 0.05, 0.10. В качестве критерия точности фильтрации была принята средняя относительная ошибка (СОО), определяемая выражением

$$\delta(\hat{F}) = M \left[ \frac{\|\hat{F} - F\|}{\|F\|} \right], \text{ где } \hat{F} \text{ означает матрицу значений от-}$$

фильтрованного изображения, а математическое ожидание берется по распределению матрицы случайного шума  $\eta$ . Выборочная оценка математического ожидания вычислялась по 30 изображениям  $\hat{F}^{(l)}$ , где  $\hat{F}^{(l)}$  – результат фильтрации изображения  $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$ , где  $\eta^{(l)}$  –  $l$ -я реализация матрицы шума.

В первых двух сериях вычислительного эксперимента в качестве минимальной СОО была принято СОО  $\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$  винеровского алгоритма вейвлет-фильтрации (базисом являлись ортогональные вейвлеты Добеши8), в котором оптимальные коэффициенты разложения вычисляются с использованием *точного отношения* «шум/сигнал», требующего задания коэффициентов разложения *точного изображения*. Очевидно, что на практике такой фильтр нереализуем, но его СОО может служить базовым «ориентиром» при сравнении СОО других алгоритмов фильтрации.



#### 4.2.2. Анализ результатов вычислительного эксперимента

В табл. 4.1 и 4.2 приведены значения коэффициента эффективности  $E = \frac{\delta(\hat{F}_{\text{винер}})}{\delta(\hat{F})}$  для разных алгоритмов фильтрации – чем

$E$  меньше значения единицы, тем больше проигрыш по точности соответствующего алгоритма фильтрации по сравнению с винеровским алгоритмом вейвлет-фильтрации, минимизирующим СКО фильтрации однородного шума. Для ЛПАФ задавались параметры  $L = 0$  (импульсный шум отсутствует),  $K = 4$  (что соответствует апертуре усредняющего фильтра  $81 \times 81$ ). Для АВФ применялась жесткая пороговая функция (3.1.1) (для используемых изображений она давала меньшую СОО по сравнению с выражением (3.1.2)). В табл. 4.1 приведены значения  $E$  при фильтрации изображения LENA, в табл. 4.2 – изображения TARGET для двух уровней шума и двух коэффициентов корреляции (0 и 0.5) между соседними значениями шума.

Таблица 4.1

	Шум не коррелирован		Шум коррелирован	
	0.05	0.10	0.05	0.10
Уровень шума	0.05	0.10	0.05	0.10
$\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$	0,029	0,046	0,038	0,069
Фильтр	Отношение $\delta(\hat{F}_{\text{винер}}) / \delta(\hat{F})$			
ФСС	0,243	0,383	0,317	0,548
КФ	0,743	0,696	0,883	0,920
Универсальный порог	0,453	0,501	0,717	0,742
SURE-порог	0,508	0,502	0,745	0,697
Байесовский порог	0,630	0,589	0,760	0,690
Квазиоптимальный алгоритм	0,724	0,709	0,825	0,784

Таблица 4.2

Уровень шума	Шум не коррелирован		Шум коррелирован	
	0.05	0.10	0.05	0.10
$\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$	0,021	0,035	0,030	0,056
Фильтр	Отношение $\delta(\hat{F}_{\text{винер}}) / \delta(\hat{F})$			
ФСС	0,183	0,318	0,297	0,494
KF	0,833	0,786	0,967	0,965
Универсальный порог	0,444	0,454	0,683	0,614
SURE-порог	0,588	0,393	0,612	0,571
Байесовский порог	0,417	0,443	0,598	0,603
Квазиоптимальный алгоритм	0,794	0,775	0,856	0,843

В табл. 4.1, 4.2 темным фоном выделены ячейки, соответствующие наибольшим значениям коэффициента эффективности  $E$ , т.е. указывающие на «наилучший» алгоритм фильтрации.

Проведенный анализ табл. 4.1, 4.2 показывает, что:

- минимальная СОО фильтрации (винеровский вейвлет-фильтр) при фильтрации цветного шума возрастает на 30–50 %;
- как при фильтрации белого шума, так и цветного наименьшую ошибку имеет комбинированный фильтр (4.1.5), (4.1.6) (даже с фиксированными размерами апертуры);
- среди АВФ наименьшую ошибку имеет квазиоптимальный алгоритм фильтрации с квазиоптимальными коэффициентами (2.3.5).

В табл. 4.3 приведены значения коэффициента эффективности  $E$  для фильтрации изображения LENA и TARGET, искаженных импульсными шумами, вероятность появления которых равна 0.01 и 0.05.

Таблица 4.3

Изображение	Вероятность 0.01		Вероятность 0.05	
	LENA	TARGET	LENA	TARGET
$\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$	0,082	0,067	0,131	0,113
Фильтр	Отношение $\delta(\hat{F}_{\text{винер}}) / \delta(\hat{F})$			
ФСС	0,759	0,603	0,867	0,653
KF	1,349	2,164	1,636	2,493
Универсальный порог	0,406	0,336	0,338	0,292
SURE-порог	0,398	0,333	0,314	0,280
Байесовский порог	0,352	0,304	0,286	0,248
Квазиоптимальный алгоритм	0,523	0,651	0,471	0,591

Анализ данных табл. 4.3 позволяет сделать выводы:

- алгоритм винеровской вейвлет-фильтрации уже не дает наименьшую СОО (коэффициент эффективности у фильтра KF больше единицы);
- комбинированный фильтр имеет СОО в 1,5–2 раза меньшую по сравнению с винеровским вейвлет-фильтром;
- пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации имеют СОО, в 5–6 раз превышающую СОО комбинированного фильтра.

Неудовлетворительную работу алгоритмов вейвлет-фильтрации при фильтрации импульсного шума можно объяснить следующим образом. В силу линейности прямого вейвлет-преобразования импульсный шум существенно увеличивает величину детализирующих коэффициентов первого и второго уровня разложения, и они становятся больше (по абсолютной величине) порога  $\lambda$  в пороговых функциях (3.1.1), (3.1.2). Следовательно, эти коэффициенты, обусловленные в основном импульсным шумом, воспринимаются алгоритмами обработки как «информативные», они участвуют в обратном вейвлет-преобразовании и вызывают в отфильтрованном сигнале тоже импульсные ошибки фильтрации.

В качестве иллюстрации этого тезиса на рис. 4.5 приведены сечения точного и зашумленного (вероятность импульса 0.05) изображения TARGET (относительный уровень однородного шума 0.1, зашумленного импульсным шумом – 0.461).

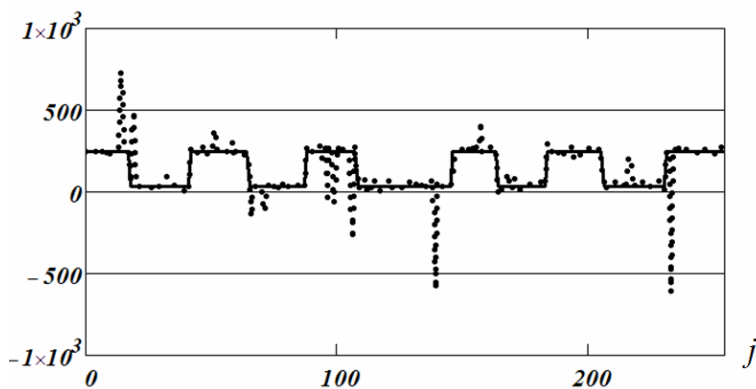


Рис. 4.5. Сечение обрабатываемого изображения TARGET

На рис. 4.6 показано сечение изображения после фильтрации комбинированным фильтром, который достаточно хорошо удалил и импульсный и однородный шумы, сохранив контрастные детали точного изображения ( $CCO = 0.038$ ).

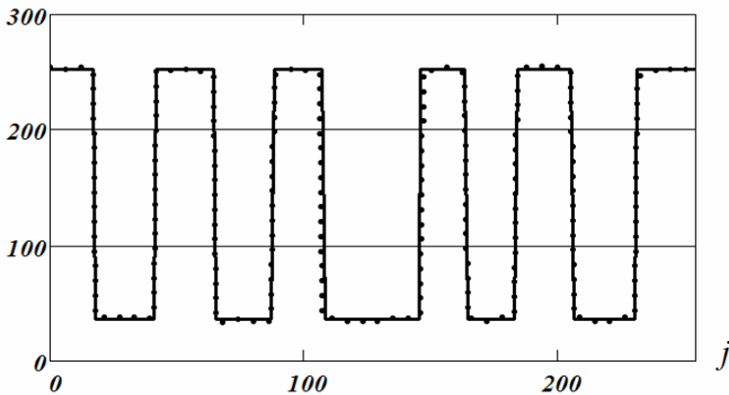


Рис. 4.6. Сечение отфильтрованного изображения TARGET

На рис. 4.7 показано сечение изображения, отфильтрованного квазиоптимальным вейвлет-фильтром. Хотя уровень остаточного шума стал меньше ( $CCO$  равно 0.189 по сравнению с исходной  $CCO = 0.461$ ), но в отфильтрованном изображении сохранились шумовые импульсы.

В литературе предлагаются несколько подходов к построению алгоритмов вейвлет-фильтрации при наличии импульсных шумов (некоторые аналогичны процедурам робастного оценивания), но все они требуют большого объема вычислений (в частности, решения вариационных задач) и будут малоэффективны при фильтрации изображений.

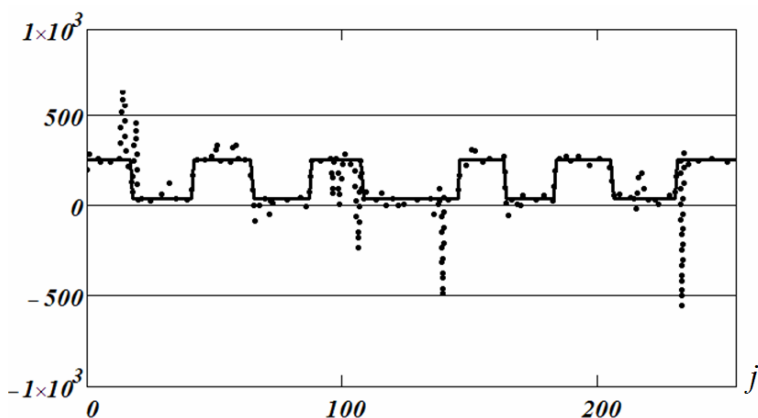


Рис. 4.7. Сечение отфильтрованного изображения TARGET

#### 4.2.3. Рекомендации по применению алгоритмов фильтрации

По-видимому, при фильтрации других изображений количественные соотношения ошибок различных алгоритмов фильтрации будут другими, «иерархия» алгоритмов по точности фильтрации сохранится.

Поэтому:

- алгоритмы вейвлет-фильтрации можно использовать для фильтрации однородного шума небольшого уровня, при сжатии изображений или построении параметрического представления функции (например, в задачах распознавания образов, регрессионном анализе и т.д.);
- алгоритмы локально-пространственной фильтрации следует использовать для фильтрации больших уровней шума, в особенности, изображений, искаженных импульсными шумами;

- алгоритмы локально-пространственной фильтрации легко обобщаются на фильтрацию векторных изображений [18, 19], когда фильтруется не каждая проекция в отдельности, а все изображение в целом, но такая фильтрация практически не реализуема с использованием вейвлет-разложений;
- при необходимости вейвлет-представления изображения, искаженного импульсным шумом, можно использовать двухэтапную обработку: на первом этапе осуществляется фильтрация комбинированным фильтром, а на втором – вейвлет-фильтрация результата обработки зашумленного изображения на первом этапе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные и рассмотренные в монографии алгоритмы вейвлет-фильтрации являются только одним (но весьма востребованным на практике) семейством в большом множестве разнообразных алгоритмов фильтрации.

Одним из серьезных конкурентов являются алгоритмы локально-пространственной фильтрации, рассмотренные в главе 4, среди которых выделяются *адаптивные алгоритмы* [5, 6, 11, 38], где за счет изменения размеров апертуры удается уменьшить (в ряде случаев существенно) ошибку фильтрации. Пространственные алгоритмы легко обобщаются для фильтрации многомерных сигналов (размерности 3,4 и выше), а также для обработки векторных полей [7, 9, 11, 48, 50, 51], где каждый отсчет является не скалярной величиной, а вектором.

В работе [17] был выполнен обширный вычислительный эксперимент по фильтрации частотными и пространственными алгоритмами «гладких» и «негладких» изображений, искаженных шумами разной статистической природы (включая импульсные шумы). Анализ результатов этого эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

- алгоритмы вейвлет-фильтрации можно использовать для фильтрации однородного шума небольшого уровня, при сжатии изображений или построении параметрического представления для последующего применения (например, в задачах распознавания образов, регрессионном анализе и т.д.);
- алгоритмы пространственной фильтрации следует использовать для фильтрации больших уровней шума, в особенности, изображений, искаженных импульсными шумами.

Эти выводы еще раз подчеркивают возможность и необходимость использования в задачах фильтрации различных алгоритмов. Выбор конкретного алгоритма зависит от модели сигнала и объема имеющейся априорной информации, а также от «алгоритмических вкусов» пользователя.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, № 11. – С. 1145–1170.
2. **Воскобойников Ю. Е.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике / Ю. Е. Воскобойников, Н. Г. Преображенский, А. И. Седельников. – Новосибирск : Наука, 1984. – 238 с.
3. **Бронников А. В.** Нелинейные комбинированные алгоритмы фильтрации зашумленных сигналов и изображения / А. В. Бронников, Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 1990. – № 1. – С. 21–28.
4. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующего алгоритма восстановления изображений / Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 1995. – № 3. – С. 64–72.
5. **Воскобойников Ю. Е.** Локальные адаптивные алгоритмы фильтрации цифровых изображений / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Научный вестник НГТУ. – 1997. – № 3. – С. 21–32.
6. **Воскобойников Ю. Е.** Алгоритмы фильтрации изображений с адаптацией размеров апертуры / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 1998. – № 3. – С. 18–25.
7. **Воскобойников Ю. Е.** Нелинейные алгоритмы фильтрации векторных сигналов / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 1999. – № 5. – С. 97–106.
8. **Воскобойников Ю. Е.** Регуляризирующий алгоритм восстановления изображений с уточнением локальных отношений «шум/сигнал» / Ю. Е. Воскобойников, И. Н. Мухина // Автометрия. – 1999. – № 4. – С. 71–83.
9. **Воскобойников Ю. Е.** Векторные локальные фильтры с адаптацией размера апертуры / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 2001. – № 6. – С. 32–42.

10. **Воскобойников Ю. Е.** Численная реализация и сравнение четырех способов выбора параметра регуляризации в устойчивых алгоритмах деконволюции [Электронный ресурс] / Ю. Е. Воскобойников // Научный вестник НГТУ. – 2004. – № 2 (17). – С. 27–44. – Режим доступа: [www.ngasu.nsk.su/prikl/deconv04.html](http://www.ngasu.nsk.su/prikl/deconv04.html)
11. **Воскобойников Ю. Е.** Новый алгоритм адаптации апертуры векторных локальных фильтров / Ю. Е. Воскобойников, А. М. Кузнецов // Автометрия. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 3–10.
12. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации : монография [Электронный ресурс] / Ю. Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2006. – 86 с. – Режим доступа: [www.sibstrin.ru/prikl/monogr07.html](http://www.sibstrin.ru/prikl/monogr07.html)
13. **Воскобойников Ю. Е.** Частотно-пространственный устойчивый алгоритм восстановления контрастных изображений / Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 1 (22). – С. 3–14.
14. **Воскобойников Ю. Е.** Комбинированный нелинейный алгоритм восстановления контрастных изображений при не точно заданной аппаратной функции / Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 3–14.
15. **Воскобойников Ю. Е.** Частотно-пространственный устойчивый алгоритм восстановления контрастных изображений / Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 1 (22). – С. 3–14.
16. **Воскобойников Ю. Е.** Комбинированный нелинейный алгоритм восстановления контрастных изображений при не точно заданной аппаратной функции // Автометрия. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 3–14.
17. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач : монография / Ю. Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2007. – 184 с.

18. **Воскобойников Ю. Е.** Алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов и изображений / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков // Автометрия. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 24–45.
19. **Воскобойников Ю. Е.** Фильтрация сигналов и изображений: Фурье и вейвлет алгоритмы : монография / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков, А. Б. Колкер. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 188 с.
20. **Воскобойников Ю. Е.** Два класса алгоритмов фильтрации и их сравнение / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 1.
21. **Воскобойников Ю. Е.** Оценка оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 3–14.
22. **Воскобойников Ю. Е.** Построение алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 17–29.
23. **Воскобойников Ю. Е.** Оценка оптимальных параметров многопараметрических пороговых функций алгоритмов вейвлет-фильтрации [Электронный ресурс] / Ю. Е. Воскобойников // Автоматика и программная инженерия. – 2013. – № 4 (6). – С. 56–65. – Режим доступа: <http://www.nips.ru/images/stories/zhournal-API/7/aipi-4-2013-06.pdf>
24. **Воскобойников Ю. Е.** Оценка оптимального параметра регуляризации одного класса нелинейных алгоритмов восстановления сигналов / Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 2013. – Т. 49, № 2.
25. **Воскобойников Ю. Е.** Оптимизация алгоритмов вейвлет-фильтрации с многопараметрическими пороговыми функциями / Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 2014. – Т. 50, № 6.
26. **Воскобойников Ю. Е.** Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации сигналов и изображений / Ю. Е. Воскобойников // Автоматика и программная инженерия. – 2015. – № 3 (9). – С. 46–55.

27. Цифровая обработка изображений в информационных системах / И. С. Грузман [и др.]. – Новосибирск : НГТУ, 2002. – 352 с.
28. **Даджион Д.** Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, Р. Мерсеро. – Москва : Мир, 1988. – 463 с.
29. **Дремин И. Л.** Вейвлеты и их использование / И. Л. Дремин, О. А. Иванов, В. А. Нечитайло // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, № 5. – С. 465–501.
30. **Дьяконов В. П.** Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. – Москва : СОЛОМОН-Р, 2002. – 448 с.
31. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов / Л. В. Новиков. – Санкт-Петербург : ООО «Модус+», 1999. – 262 с.
32. **Рабинер Л.** Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – Москва : Мир, 1978. – 847 с.
33. **Смоленцев Н. К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MatLAB / Н. К. Смоленцев. – Москва : ДМК, 2005. – 304 с.
34. **Хуанг Т. С.** Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т. С. Хуанг. – Москва : Радио и связь, 1984. – 340 с.
35. **Abramovitch F.** Wavelet thresholding via a Bayesian approach / F. Abramovitch, T. Sapatinas, B. W. Silverman // Journal of the Roy Statist. Soc. Ser. B. – 1998. – № 60. – P. 725–749.
36. **Abramovitch F.** Adaptive thresholding of wavelet coefficients / F. Abramovitch, Y. Benjamini // Computational Statistics and Data Analyses. – 1996. – Vol. 222, № 2. – P. 351–361.
37. **Benjamini Y.** Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing / Y. Benjamini, Y. Hochberg // Journal of the Roy Statist. Soc. Ser. B. – 1995. – № 57. – P. 289–300.
38. **Bruce A. G.** Waveshrink with firm shrinkage / A. G. Bruce, H.-Y. Gao // Statistica Sinica. – 1997. – Vol. 4, № 6. – P. 855–874.
39. **Chang S. G.** Adaptive wavelet thresholding for image denoised and compression / S. G. Chang, B. Yu, M. Vetterli // IEEE Transactions on Image Processing. – 2000. – Vol. 9, № 8. – P. 1532–1546.

40. **Donoho D. L.** Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage / D. L. Donoho, I. M. Johnstone // *Biometrika*. – 1994. – Vol. 81, № 3. – P. 425–455.
41. **Donoho D. L.** Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage / D. L. Donoho, I. M. Johnstone // *Journal of the American Statistical Association*. – 1995. – Vol. 90, № 432. – P. 1200–1224.
42. **Donoho D. L.** De-noised by soft-thresholding / D. L. Donoho // *IEEE Trans. Information Theory*. – 1995. – Vol. 41, № 3. – P. 613–627.
43. **Gao H.-Y.** Wavelet shrinkage denoising the non-negative garrote / H.-Y. Gao // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. – 1998. – Vol. 7, № 4. – P. 469–488.
44. **Ghael S. P.** Improved wavelet denoising via empirical Wiener filtering / S. P. Ghael, A. M. Sayeed, R. G. Baraniuk // *Proceedings of SPIE*. – 1997. – Vol. 3169. – P. 389–399.
45. **Golub G. H.** Generalized cross validation as a method for choosing a good ridge parameter / G. H. Golub, M. Heath, G. Wahba // *Technometrics*. – 1979. – Vol. 21. – P. 215–222.
46. **Katkovnik V.** Weighted median filter with varying adaptive windows size / V. Katkovnik, K. Egiazarian, J. Astova // *Proceedings of the IASTED Intern Conf. on Signal Processing and Communications, Spain*. – 2000. – P. 329–333.
47. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$  / S. Mallat // *Trans. AMS*. – 1989. – Vol. 315, № 1. – P. 69–87.
48. **Mallat S.** A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation / S. Mallat // *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* – 1989. – Vol. 11, № 9. – P. 674–693.
49. **Mahesh B.** Adaptive estimators for filtering noisy images / B. Mahesh, W.-J. Song, W. A. Pearlman // *Opt. Eng.* – 1990. – Vol. 29, № 5. – P. 488.
50. **Nason G. P.** Wavelet shrinkage using cross validation / G. P. Nason // *Journal of the Roy Statist. Soc. Ser. B*. – 1998. – № 60. – P. 463–479.

51. **Nason G. P.** Choice of wavelet smoothness, primary resolution and threshold in wavelet shrinkage / G. P. Nason // *Statistics and Computing*. – 2002. – Vol. 12, № 2. – P. 219–227.
52. **Neelamani R.** ForWaRD: Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems / R. Neelamani, H. Choi, R. Baraniuk // *IEEE Transactions on signal processing*. – 2004. – Vol. 52, № 2. – P. 418–426.
53. **Vidakovic B.** Statistical modeling by wavelets. Wiley series in probability and statistics / B. Vidakovic // John Wiley & Sons Inc. – 1999. – 365 p.
54. **Voskoboinikov Yu. E.** Estimating the optimal parameter of regularizing algorithms for image restoration / Yu. E. Voskoboinikov // *Optoelectronics, Instrumentations and Data Processing*. – 1995. – № 3. – P. 64.
55. **Voskoboinikov Yu. E.** Regularizing algorithm of signals and images restoration with specification of the local relations noise/signal / Yu. E. Voskoboinikov, I. N. Mukhina // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 1999. – № 4. – P. 71–82.
56. **Voskoboinikov Yu. E.** Nonlinear algorithms for vector signal filtering / Yu. E. Voskoboinikov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 1999. – № 5. – P. 96–103.
57. **Voskoboinikov Yu. E.** Local regularizing algorithm for high-contrast image and signal restoration / Yu. E. Voskoboinikov, I. N. Mukhina // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2000. – № 3. – P. 41–48.
58. **Voskoboinikov Yu. E.** Vector local filters with an adaptive aperture size / Yu. E. Voskoboinikov, V. G. Belyavtsev // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2001. – № 6. – P. 34–42.
59. **Voskoboinikov Yu. E.** A new adaptive aperture algorithm for local vector filters / Yu. E. Voskoboinikov, A. M. Kuznetsov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 14–26.

60. **Voskoboinikov Yu. E.** Quasi-optimal estimation algorithm of wavelet-decomposition coefficients at a signals filtration / Yu. E. Voskoboinikov, A. V. Gochakov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 34–45.
61. **Voskoboinikov Yu. E.** Estimating optimum threshold sizes in a wavelet-filtration algorithms / Yu. E. Voskoboinikov, A. V. Gochakov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2011. – Vol. 47, № 2. – P. 3–14.
62. **Voskoboinikov Yu. E.** Comparison of two classes of a image filtration algorithms / Yu. E. Voskoboinikov, A. V. Gochakov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2011. – Vol. 47, № 1. – P. 17–29.
63. **Voskoboinikov Yu. E.** Construction of a wavelet-filtration algorithms with two-parametrical threshold functions / Yu. E. Voskoboinikov, A. V. Gochakov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2012. – Vol. 48, № 1. – P. 17–27.
64. **Voskoboinikov Yu. E.** Estimation of the optimal regularization parameter of an iterative wavelet algorithm for signal recovery / Yu. E. Voskoboinikov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2013. – Vol. 49, № 2. – P. 9–18.
65. **Voskoboinikov Yu. E.** Optimization of wavelet-filtration algorithms with multiple parameter threshold functions / Yu. E. Voskoboinikov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2014. – Vol. 50, № 6.
66. **Weyrich N.** Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising / N. Weyrich, G. T. Warhola // *IEEE Trans. Image Processing*. – 1998. – Vol. 7, № 1. – P. 82–90.
67. **Zhang X.-P.** Adaptive denoising based on SURE risk / X.-P. Zhang, M. D. Desai // *IEEE Signal Process. Lett.* – 1998. – Vol. 5, № 10. – P. 265–267.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### МОДУЛИ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Приводится текст подпрограммы-функции  $D1\_Filter\_λ_{all}$ , которая реализует алгоритм вейвлет-фильтрации одномерных сигналов с порогом  $λ_w$ , а также тексты программных модулей, используемых  $D1\_Filter\_λ_{all}$ .

**Обращение к подпрограмме-функции  $D1\_Filter\_λ_{all}$**  имеет вид:

$D1\_Filter\_λ_{all}(f_η, J_{fil}, J_{wav}, wav, Num)$ .

#### **Формальные параметры:**

$f_η$  – одномерный массив длиной  $N = 2^{j_0}$ , содержащий зашумленные значения функции;

$J_{fil}$  – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

$J_{wav}$  – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнение условия  $J_{fil} ≤ J_{wav} ≤ j_0$ );

$wav$  – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав  $daublet(8)$ , получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

$Num$  – задает вид пороговой функции: если  $Num = 1$ , то функция *hard*; если  $Num > 1$ , то функция *soft*.

*Результатом работы* является массив данной  $N$ , содержащий отфильтрованные значения функции.

**Внимание!** Значение дисперсии  $σ^2$ , используемого для вычисления пороговой величины  $λ_w$ , оценивается внутри описываемой подпрограммы-функции.



## Подпрограмма-функция $D1\_Filter\_l_{all}$

```

D1_Filter_lall(fη, Jfil, Jwav, wav, Num) :=
    com ← "Фильтрация одномерного сигнала "
    com ← "порог λ один для всех уровней "
    Jmax ← MaxDWTLevel(fη)
    if (Jwav > Jmax) ∨ (Jfil > Jwav)
        error("error J.wav > Jmax")
    return Jmax
    w ← dwt(fη, Jwav, wav)
    wr ← w
    wm ← get_detail(wr, 1)
    σ ←  $\frac{\text{median}(\overrightarrow{|wm|})}{0.6547}$ 
    a ← 0.001 · σ
    b ← 1000 · σ
    wr ← w
    λW ← Calc_λWH(wr, Jfil, σ2, a, b) if Num = 1
    λW ← Calc_λWS(wr, Jfil, σ2, a, b) otherwise
    wr ← w
    for l ∈ 1..Jfil
        wm ← get_detail(w, l)
        wmf ← Hard(wm, λW) if Num = 1
        wmf ← Soft(wm, λW) otherwise
        wr ← put_detail(wr, l, wmf)
    fλ ← idwt(wr, Jwav, wav)
    fλ

```

*ORIGIN* = 0

*Hard*(*w*,  $\lambda$ ) :=  $\left\{ \begin{array}{l} N \leftarrow \text{length}(w) \\ \text{for } j \in 0..N - 1 \\ \quad wf_j \leftarrow \text{if}(|w_j| \geq \lambda, w_j, 0) \\ wf \end{array} \right.$

*Soft*(*w*,  $\lambda$ ) :=  $\left\{ \begin{array}{l} N \leftarrow \text{length}(w) \\ \text{for } j \in 0..N - 1 \\ \quad wf_j \leftarrow \text{sign}(w_j) \cdot \text{if}[ (|w_j| - \lambda) > 0, |w_j| - \lambda, 0 ] \\ wf \end{array} \right.$

*D1\_Filter\_H*( $f_\eta, \lambda, J_{fl}, J_{wav}, \text{wavelet}$ ) :=  $\left\{ \begin{array}{l} com \leftarrow \text{"функция Hard"} \\ com \leftarrow \text{"порог } \lambda \text{ задан"} \\ J_{max} \leftarrow \text{MaxDWTLevel}(f_\eta) \\ \text{if } (J_{wav} > J_{max}) \vee (J_{fl} > J_{wav}) \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{error("error J.wav>Jmax")} \\ \text{return } J_{max} \end{array} \right. \\ w \leftarrow \text{dwt}(f_\eta, J_{wav}, \text{wavelet}) \\ wf \leftarrow w \\ \text{for } l \in 1..J_{fl} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} wm \leftarrow \text{get\_detail}(w, l) \\ wmf \leftarrow \text{Hard}(wm, \lambda) \\ wf \leftarrow \text{put\_detail}(wf, l, wmf) \end{array} \right. \\ f_\lambda \leftarrow \text{idwt}(wf, J_{wav}, \text{wavelet}) \\ f_\lambda \end{array} \right.$

$D1\_Filter\_S(f_\eta, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet) :=$	<pre> com ← "функция Soft " com ← "порог λ задан " J_max ← MaxDWTLevel(f_η) if (J_wav &gt; J_max) ∨ (J_fil &gt; J_wav)   error("error J.wav&gt;Jmax")   return J_max  w ← dwt(f_η, J_wav, wavelet) wf ← w for l ∈ 1.. J_fil   wm ← get_detail(w, l)   wmf ← Soft(wm, λ)   wf ← put_detail(wf, l, wmf) f_λ ← idwt(wf, J_wav, wavelet) f_λ </pre>
--	---

```

D1_Filter_UNIV( $f_{\eta}$ ,  $J_{fil}$ ,  $J_{wav}$ ,  $wavelet$ ,  $Num$ ) :=
    com ← "Универсальный порог"
    com ← "для каждого уровня разложения"
     $J_{max}$  ← MaxDWTLevel( $f_{\eta}$ )
    if ( $J_{wav} > J_{max}$ ) ∨ ( $J_{fil} > J_{wav}$ )
        error("error J>Jmax")
    return  $J_{max}$ 
    w ← dwt( $f_{\eta}$ ,  $J_{wav}$ ,  $wavelet$ )
    wf ← w
    for l ∈ 1 ..  $J_{fil}$ 
        wm ← get_detail(w, l)
         $n_l$  ← length(wm)
        if l = 1
            com ← "вычисление дисперсии"
             $wm1$  ← wm
             $\sigma$  ←  $\frac{\text{median}(\overrightarrow{|wm1|})}{0.6547}$ 
             $\lambda$  ←  $\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(n_l)}$ 
             $wmf$  ← Hard(wm,  $\lambda$ ) if Num = 1
             $wmf$  ← Soft(wm,  $\lambda$ ) otherwise
            wf ← put_detail(wf, l, wmf)
    xf ← idwt(wf,  $J_{wav}$ ,  $wavelet$ )
    xf

```

<i>Calc_FunOPT</i> ( <i>wm</i> , <i>wmf</i> , $\sigma_2$ ) :=	$em \leftarrow wm - wmf$ $\rho \leftarrow \frac{1}{\sigma_2} \cdot wm \cdot em$ $\rho$
<i>Calc_ρWSoft</i> ( <i>w</i> , $\lambda$ , <i>J<sub>fll</sub></i> , $\sigma_2$ ) :=	$\rho \leftarrow 0.0$ <i>for</i> $l \in 1..J_{fll}$   $wm \leftarrow get\_detail(w, l)$   $wmf \leftarrow Soft(wm, \lambda)$   $\rho_l \leftarrow Calc\_FunOPT(wm, wmf, \sigma_2)$   $\rho \leftarrow \rho + \rho_l$ $\rho$
<i>Calc_ρWHard</i> ( <i>w</i> , $\lambda$ , <i>J<sub>fll</sub></i> , $\sigma_2$ ) :=	$\rho \leftarrow 0.0$ <i>for</i> $l \in 1..J_{fll}$   $wm \leftarrow get\_detail(w, l)$   $wmf \leftarrow Hard(wm, \lambda)$   $\rho_l \leftarrow Calc\_FunOPT(wm, wmf, \sigma_2)$   $\rho \leftarrow \rho + \rho_l$ $\rho$

```

Calc_λWS(w, Jfil, σ2, a, b) :=
  a ← log(a)
  b ← log(b)
  N ← length(w)
  θ1 ← N - 2·√2·N
  θ2 ← N + 2·√2·N
  ρa ← Calc_ρWHard(w, 10a, Jfil, σ2) - N
  for i ∈ 1..100
    | x ← (a + b) / 2
    | ρx ← Calc_ρWSoft(w, 10x, Jfil, σ2) - N
    | if θ1 ≤ ρx + N ≤ θ2
      | λw ← 10x
      | break
    | if ρx · ρa > 0
      | a ← x
      | ρa ← ρx
    | b ← x if ρx · ρa ≤ 0
  λw

```

```

Calc_λWH(w, Jfil, σ2, a, b) :=
  a ← log(a)
  b ← log(b)
  N ← length(w)
  θ1 ← N - 2 · √(2 · N)
  θ2 ← N + 2 · √(2 · N)
  ρa ← Calc_ρWHard(w, 10a, Jfil, σ2) - N
  for i ∈ 1..100
    |
    | x ←  $\frac{a + b}{2}$ 
    |
    | ρx ← Calc_ρWHard(w, 10x, Jfil, σ2) - N
    | if θ1 ≤ ρx + N ≤ θ2
    |
    | | λw ← 10x
    | | break
    |
    | if ρx · ρa > 0
    |
    | | a ← x
    | | ρa ← ρx
    |
    | b ← x if ρx · ρa ≤ 0
  λw

```

Научное издание

Воскобойников Юрий Евгеньевич

**ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ  
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ  
(с примерами  
в пакете MathCAD)**

Монография

ISBN 978-5-7795-0755-4



Темплан 2015 г.

Редактор Г.К. Найденова

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.  
Подписано к печати 20.10.2015. Формат 60×84 1/16 д.л.  
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.  
Объём 10,9 уч.-изд.л.; 12,0 п.л. Тираж 40 экз. Заказ №

---

Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)  
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

---

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии  
НГАСУ (Сибстрин)



## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

### **Воскобойников Юрий Евгеньевич**

заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин), д-р физ.-мат. наук, профессор, соросовский профессор, заслуженный работник высшей школы РФ, член ряда Международных и Российских академий.

Автор 18 учебных пособий и более 290 научных работ по методам и алгоритмам решения некорректных задач интерпретации экспериментальных данных, вычислительной томографии, фильтрации сигналов и изображений, в том числе шести монографий по решению некорректно поставленных задач и задач фильтрации сигналов и изображений. Член двух специализированных советов по защите диссертаций на соискание степени доктора наук.

(e-mail: [voscob@mail.ru](mailto:voscob@mail.ru), [voscob@ngs.ru](mailto:voscob@ngs.ru))